

# Моделирование синусного механизма с упорным подшипником

*Емельянов Эдуард Владимирович*

25 июля 2012 г.

## 1 Общие выкладки

Для моделирования синусного механизма в общем случае (см. рис. 1) примем, что ось вращения зеркала (точка  $O'$ ) имеет координаты  $(x', y')$  относительно центра зеркала, а ось упорного подшипника (точка  $O''$ ) — координаты  $(x'', y'')$ . Радиус подшипника обозначим  $R$ .

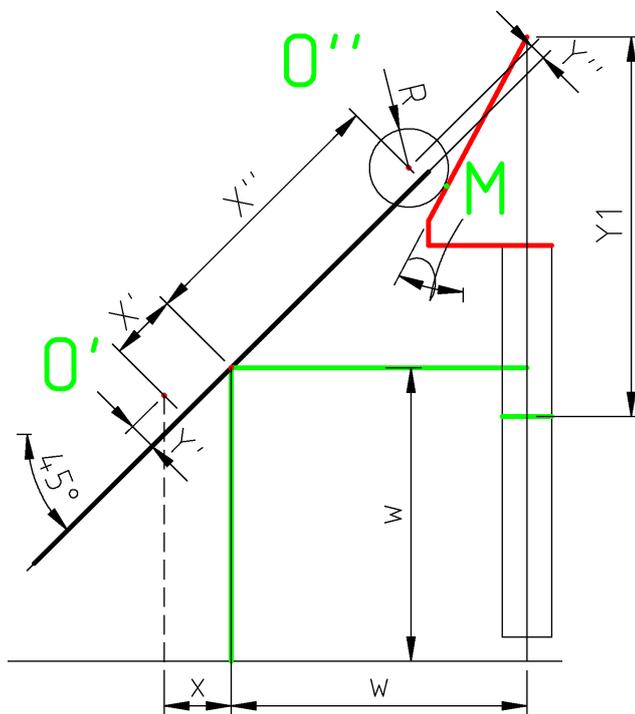


Рис. 1: Условные обозначения

Угол наклона зеркала,  $\alpha$ , будем отсчитывать от горизонтали. Угол среза толкателя обозначим  $\gamma$ .

При вертикальном перемещении толкателя на величину  $dZ_s$  угол наклона зеркала изменится и центр отраженного пучка света сместится на величину  $dZ_r$  (см. рис. 2). Наша задача — так подобрать координаты точек  $O'$  и  $O''$ , а также угол среза толкателя,  $\gamma$ , чтобы отклонение пучка от центра дифракционной решетки ( $|dZ_r - dZ_s|$ ) было минимальным.

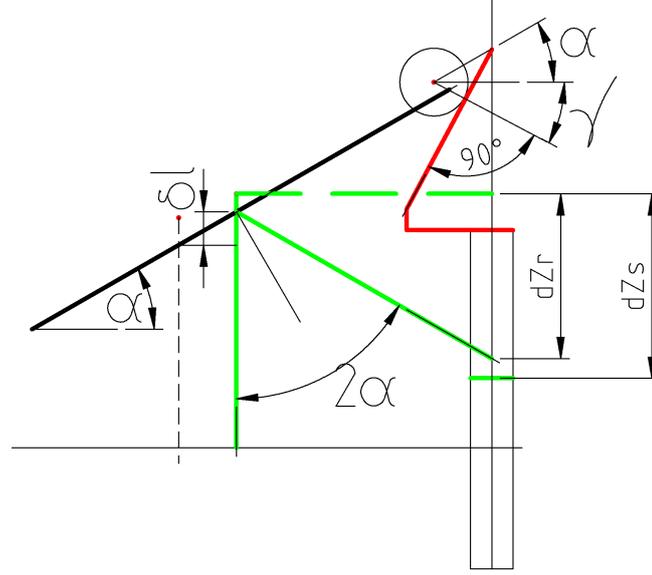


Рис. 2: Изменение угла наклона

Координаты точки  $O''$  относительно точки  $O'$  определяются из рисунка 1:

$$\begin{cases} x_{O''} = (x'' - x') \cos \alpha - (y'' - y') \sin \alpha; \\ y_{O''} = (x'' - x') \sin \alpha + (y'' - y') \cos \alpha. \end{cases}$$

Точка касания подшипником упора,  $M$ , лежит на нормали к упору, проходящей через точку  $O''$ . При движении упора эта точка перемещается по его поверхности так, что вектор  $\overrightarrow{O''M}$  переносится параллельно себе. Координаты точки  $M$  относительно  $O'$ :

$$\begin{cases} x_M = x_{O''} + R \cos(\gamma); \\ y_M = y_{O''} - R \sin(\gamma). \end{cases} \quad (1.1)$$

Наклоняя зеркало от  $0^\circ$  до угла  $\alpha$ , мы увеличиваем длину центрального луча, падающего на зеркало, на величину  $\delta l$ . Из рисунка 3 найдем:  $\delta l = b - (x' + a) \operatorname{tg} \alpha$ ,  $b = y'(1 - \cos \alpha)$ ,  $a = y' \sin \alpha$ . Отсюда

$$\delta l = y'(1 - \cos \alpha) - \operatorname{tg} \alpha (x' + y' \sin \alpha).$$

После отражения от поверхности зеркала центральный луч упадет на дифракционную решетку на расстоянии (по вертикали)  $\Delta l = w \operatorname{ctg}(2\alpha)$  от точки

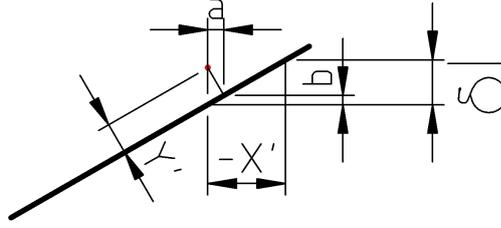


Рис. 3: Участок зеркала вблизи оси вращения

своего падения (см. рис. 2). Относительно плоскости зеркала при  $\alpha = 0^\circ$  координата  $Y$  точки падения луча на решетку равна

$$y_{\text{ray}} = \delta l - \Delta l = \delta l - w \operatorname{ctg}(2\alpha).$$

Длина луча от условной плоскости, расположенной на  $l_0$  ниже плоскости поверхности зеркала при  $\alpha = 0^\circ$ , составит  $l_0 + \delta l + w/\cos(2\alpha)$ . В нашем случае при  $\alpha = 45^\circ$  длина луча составляет  $2w$ , а  $l_0 + \delta l = w$ .

Введем теперь условный нуль координат в точке пересечения поверхности зеркала при  $\alpha = 0^\circ$  и центрального луча. Тогда координаты точки  $M$  оказываются связанными между собой выражением

$$Y_0 - y_m = (w - x' - x_m) \operatorname{ctg} \gamma, \quad (1.2)$$

где  $Y_0$  – координата вершины толкателя.

Выражения (1.1) и (1.2) однозначно связывают угол наклона зеркала со смещением толкателя.

## 2 Выбор параметров

В модели присутствуют шесть свободных параметров (координаты оси вращения зеркала, координаты оси упорного подшипника, угол при вершине толкателя, радиус подшипника). Через них выражаются угол наклона зеркала и перемещение подвижки с дифракционной решеткой. Оптимизировать задачу по степеням свободы будем, фиксируя поочередно все параметры, кроме одного, который и будем варьировать. Такой подход не лишен недостатков (в виде локальных минимумов нашего функционала), однако, так как нам не требуется найти точное решение, этот подход вполне пригоден.

При вариации переменных будем пользоваться такими начальными значениями:

$$R = 5.5, \quad x' = -13.6, \quad y' = 0, \quad x'' = 53.5, \quad y'' = 6.5, \quad \gamma = 28^\circ.$$

На графиках обозначим:  $YS$  – смещение подвижки,  $YR$  – смещение луча.

Выясним, в каких пределах должны будем искать угол среза толкателя. Для этого проварьерируем  $\gamma$  (см. рис. 4). При заданных прочих условиях наименьшее отклонение наблюдается при  $\gamma \in [20^\circ, 30^\circ]$ .

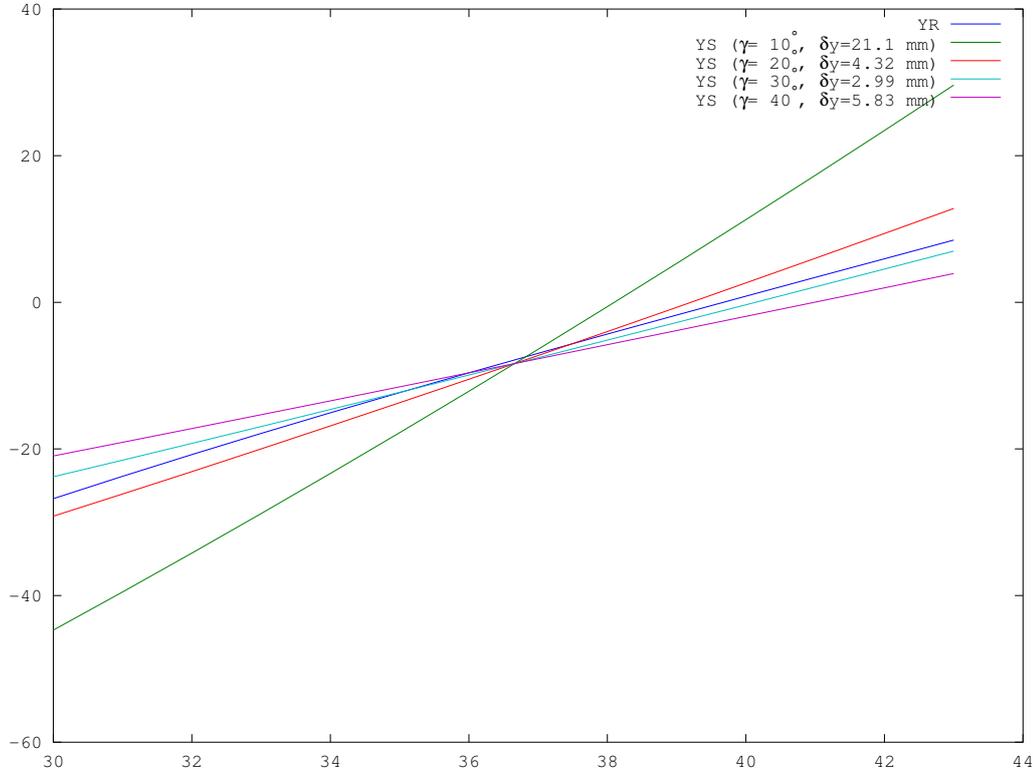


Рис. 4: Смещение луча при изменении угла  $\gamma$ .

Проварьерируем  $R$  — радиус подшипника — от 0 до 15. Очевидно, что его увеличение приводит к уменьшению смещения луча  $\alpha$  (см. рис. 5). Однако, это влияние не столь сильно проявляется, как изменение угла среза толкателя. В большей степени от  $R$  зависит положение толкателя по отношению к дифракционной решетке.

Варьирование  $x''$  показывает, что оптимальным размещением подшипника является пятимиллиметровая зона вблизи края зеркала:  $x'' \in [55, 60]$  (см. рис. 6).

При изменении  $y''$  смещение изменяется незначительно. Наименьшее отклонение луча от центра решетки наблюдается при  $y'' = 20$  (см. рис. 7). В то же время наблюдается зависимость  $y''$  от  $x''$ : при приближении оси подшипника к краю оправы зеркала оптимальное значение координаты  $y$  приближается к поверхности зеркала.

Проварьерируем переменную  $x'$  — координату  $x$  оси вращения зеркала. Самое время вспомнить, что мы имеем еще одно ограничение, накладываемое на наше решение: полная длина луча должна как можно меньше изменяться при наклоне зеркала. В результате получим, что оптимальное значение  $x' \approx$

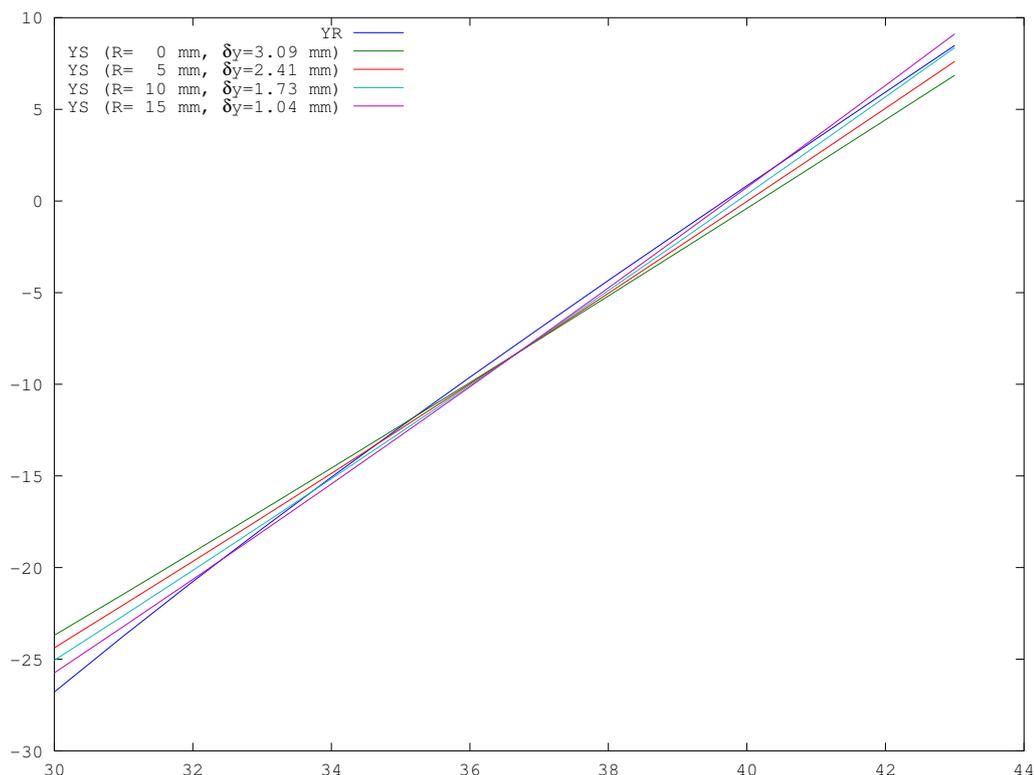


Рис. 5: Влияние изменения радиуса подшипника,  $R$ , на смещение центрального луча относительно центра решетки.

—20 (см. рис. 8).

Варьирование переменной  $y'$  показывает, что наиболее оптимальным решением является размещение оси вращения зеркала ниже его поверхности (см. рис. 9). В результате получаем:  $y' \approx -15$ .

Проведем несколько итераций варьирования переменных для поиска их оптимальных значений. Некоторые результаты разместим в таблицах. Введем обозначения (координаты измеряются относительно точки пересечения последней оптической поверхности коллиматора оптической осью):

первый столбец — значение варьируемой переменной;

$Y_0$  — координата вершины толкателя;

$dY_{\max}$  — максимальное отклонение луча от центра решетки;

$dL_{\max}$  — максимальное отклонение длины луча от 120 мм;

$Y_{30}$  — координата середины решетки при  $\alpha = 30^\circ$ ;

$Y_{45}$  — координата середины решетки при  $\alpha = 45^\circ$ ;

$\Delta Y$  — величина перемещения подвижки для перехода из фотометрического режима в спектральный с  $\alpha = 30^\circ$ ;

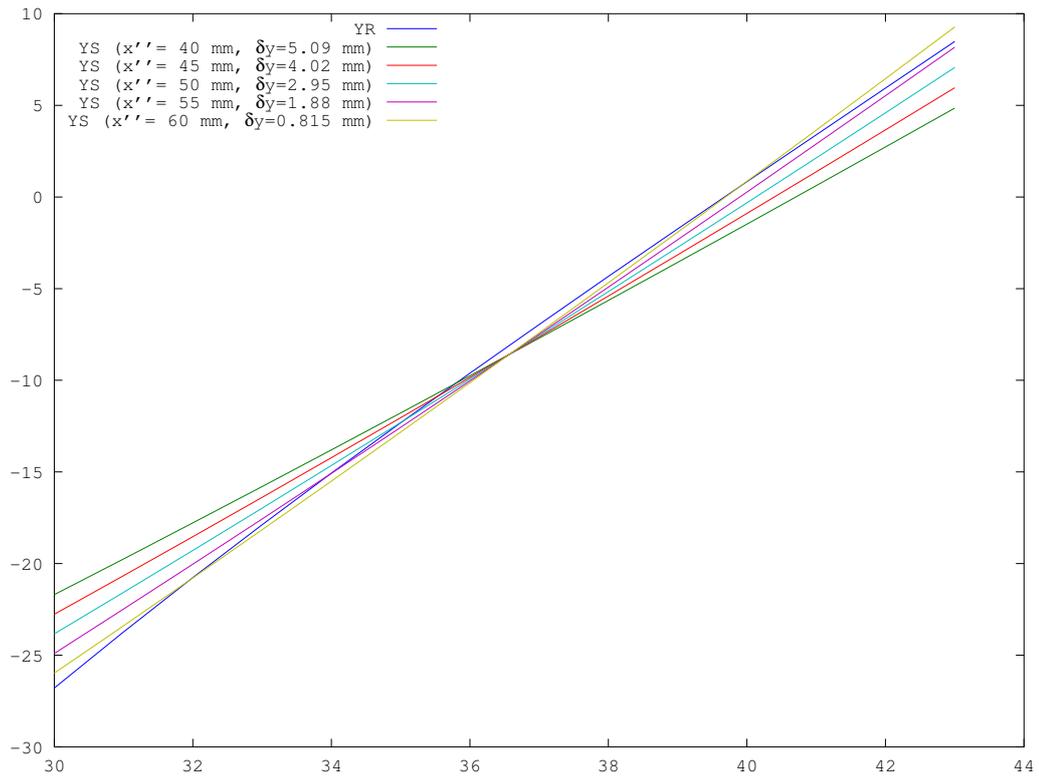


Рис. 6: Варьирование координаты  $x$  оси упорного подшипника.

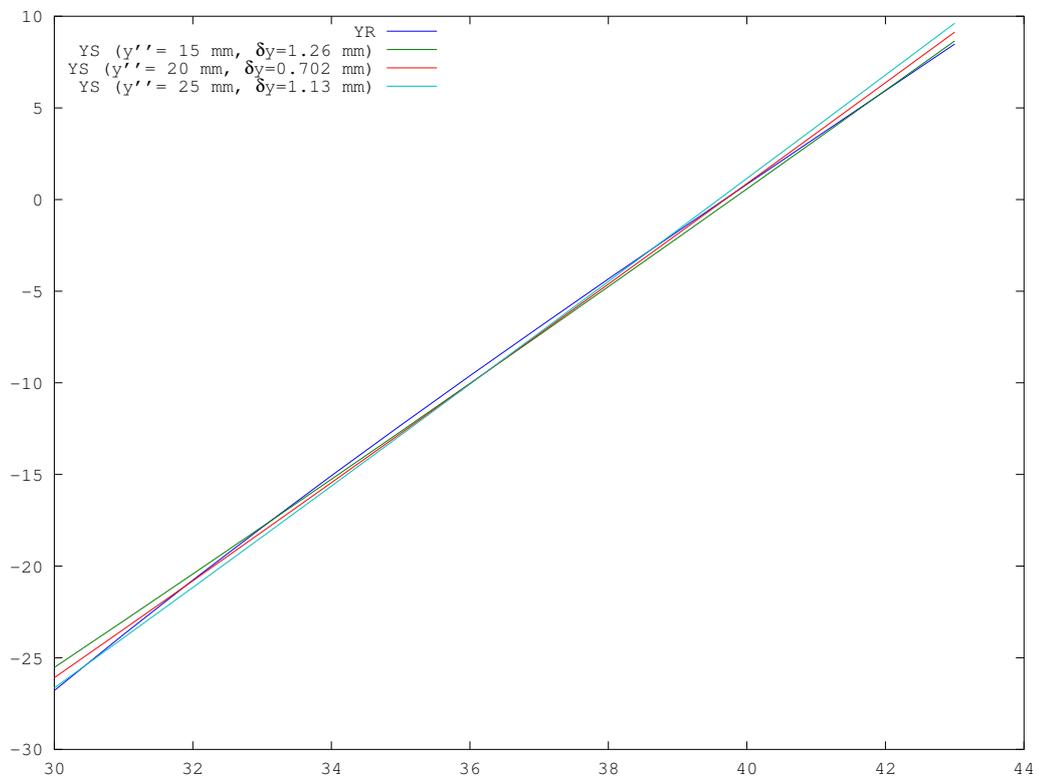


Рис. 7: Варьирование координаты  $y$  оси упорного подшипника.

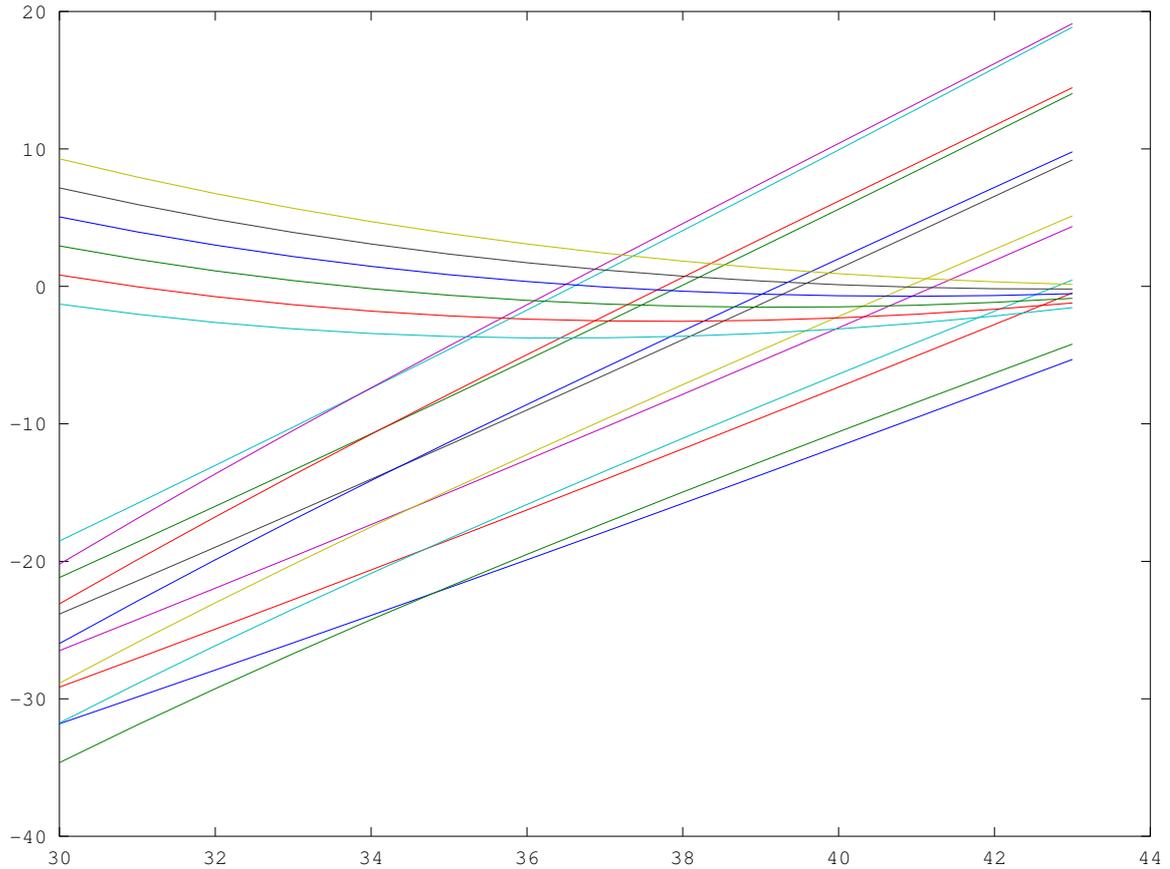


Рис. 8: Влияние изменения координаты  $x$  оси вращения зеркала на смещение центрального луча относительно центра решетки. Жирными линиями отмечено изменение длины центрального луча (сверху – линия с наибольшим значением  $x' = 0$ ). Тонкими линиями – смещения подвижки и луча на решетке (сверху – линии с  $x' = 0$ ).

**координаты оси** — координаты оси вращения зеркала.

Варьирование  $x'$  и  $y'$  (см. табл. 1) показывает, что оптимальными значениями этих переменных являются

$$x' = -17.4, \quad y' = 0.0.$$

Варьирование  $x''$  и  $y''$  (см. табл. 2) дает:

$$x'' = 60.0, \quad y'' = 12.0.$$

Варьирование  $\gamma$  показывает то, что локальным минимумом функционала является выбранное нами значение:

$$\gamma = 28^\circ, \quad Y_0 = 152.7, \quad x_{\text{axe}} = -17.4, \quad y_{\text{axe}} = 42.6.$$

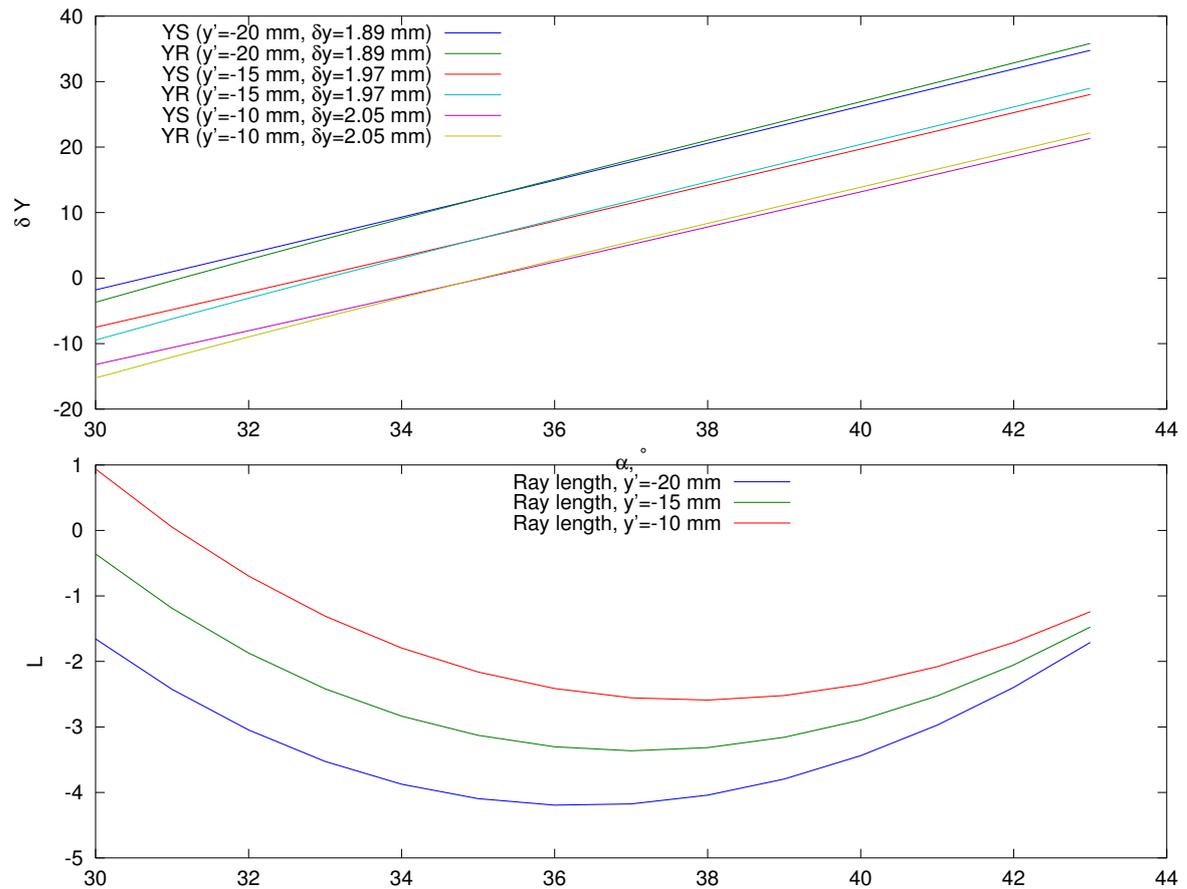


Рис. 9: Влияние изменения координаты  $y$  оси вращения зеркала.

Построим итоговые графики по найденным параметрам (см. рис.10 и 11).

| $y'$  | $Y_0$ | $dY_{\max}$ | $dL_{\max}$ | $Y_{30}$ | $Y_{45}$ | $\Delta Y$ | Координаты оси |
|-------|-------|-------------|-------------|----------|----------|------------|----------------|
| -20.0 | 153.4 | 0.84        | 2.54        | 17.6     | 60.8     | 27.6       | (-20.0, 40.0)  |
| -19.0 | 153.1 | 0.81        | 2.32        | 18.1     | 60.8     | 28.1       | (-19.0, 41.0)  |
| -18.0 | 152.8 | 0.79        | 2.10        | 18.5     | 60.8     | 28.5       | (-18.0, 42.0)  |
| -17.0 | 152.6 | 0.84        | 2.10        | 19.0     | 60.7     | 29.0       | (-17.0, 43.0)  |
| -16.0 | 152.3 | 0.89        | 2.52        | 19.5     | 60.7     | 29.5       | (-16.0, 44.0)  |
| -17.6 | 152.7 | 0.81        | 2.01        | 18.7     | 60.8     | 28.7       | (-17.6, 42.4)  |
| -17.5 | 152.7 | 0.82        | 1.99        | 18.8     | 60.8     | 28.8       | (-17.5, 42.5)  |
| -17.4 | 152.7 | 0.82        | 1.97        | 18.8     | 60.8     | 28.8       | (-17.4, 42.6)  |
| -17.3 | 152.7 | 0.83        | 1.97        | 18.9     | 60.8     | 28.9       | (-17.3, 42.7)  |
| -17.2 | 152.6 | 0.83        | 2.01        | 18.9     | 60.8     | 28.9       | (-17.2, 42.8)  |

Таблица 1: Изменение величин при варьировании  $x'$ .

| $y'$ | $Y_0$ | $dY_{\max}$ | $dL_{\max}$ | $Y_{30}$ | $Y_{45}$ | $\Delta Y$ | Координаты оси |
|------|-------|-------------|-------------|----------|----------|------------|----------------|
| 10.0 | 148.6 | 1.07        | 1.97        | 19.1     | 60.5     | 29.1       | (-17.4, 42.6)  |
| 11.0 | 150.7 | 0.95        | 1.97        | 19.0     | 60.7     | 29.0       | (-17.4, 42.6)  |
| 12.0 | 152.7 | 0.82        | 1.97        | 18.8     | 60.8     | 28.8       | (-17.4, 42.6)  |
| 13.0 | 154.7 | 0.86        | 1.97        | 18.7     | 60.9     | 28.7       | (-17.4, 42.6)  |
| 14.0 | 156.8 | 0.97        | 1.97        | 18.6     | 61.0     | 28.6       | (-17.4, 42.6)  |

Таблица 2: Изменение величин при варьировании  $y''$ .

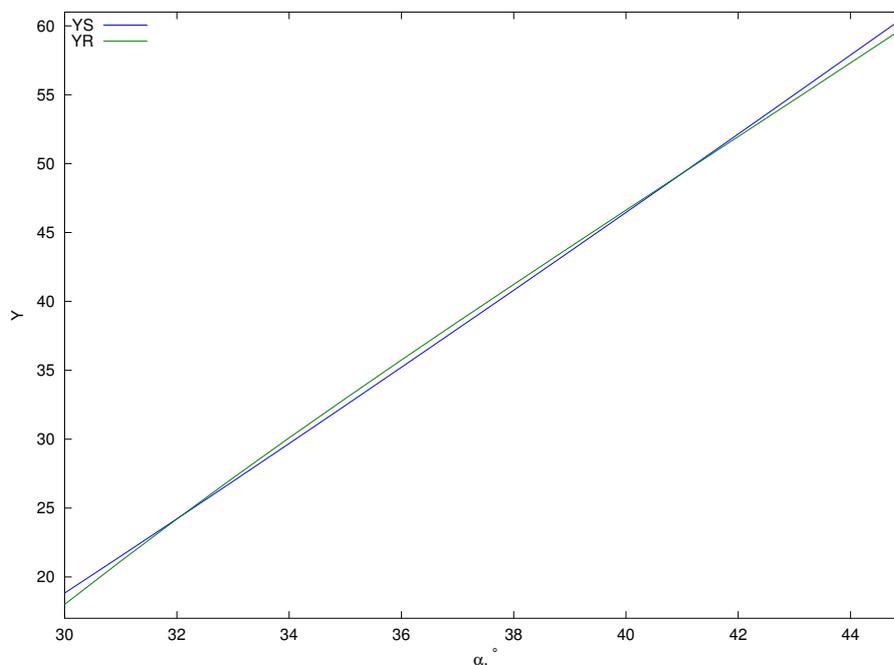


Рис. 10: Взаимосвязь положения подвижки и угла наклона зеркала.

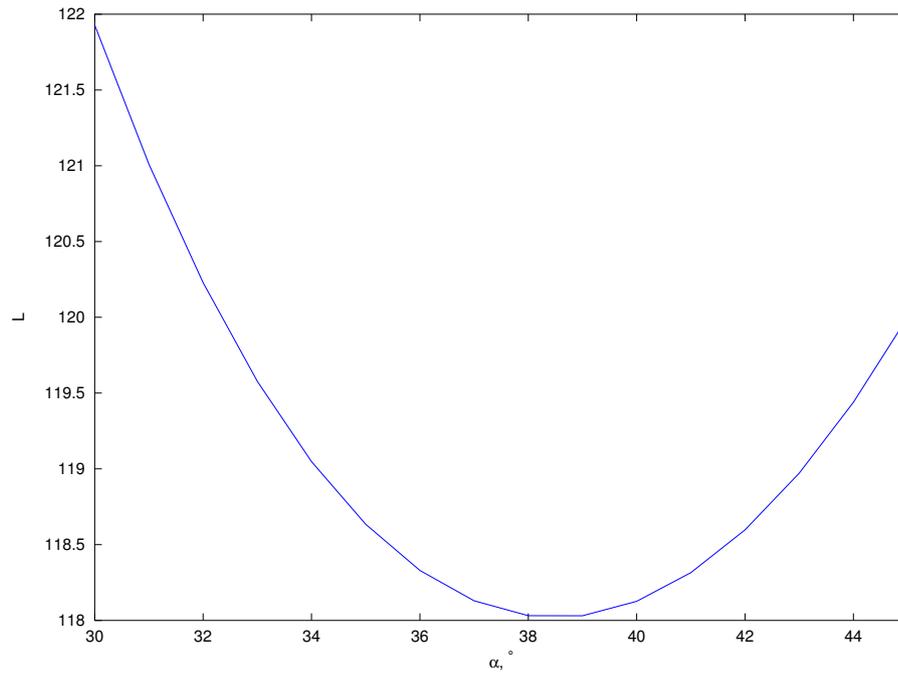


Рис. 11: Зависимость длины центрального луча от угла наклона зеркала.

| $\alpha$ | $\alpha_0$ | $Y$  | $L$   |
|----------|------------|------|-------|
| 30       | 30         | 18.8 | 121.9 |
| 31       | 28         | 21.5 | 121.0 |
| 32       | 26         | 24.2 | 120.2 |
| 33       | 24         | 26.9 | 119.6 |
| 34       | 22         | 29.7 | 119.0 |
| 35       | 20         | 32.4 | 118.6 |
| 36       | 18         | 35.2 | 118.3 |
| 37       | 16         | 38.0 | 118.1 |
| 38       | 14         | 40.8 | 118.0 |
| 39       | 12         | 43.6 | 118.0 |
| 40       | 10         | 46.5 | 118.1 |
| 41       | 8          | 49.3 | 118.3 |
| 42       | 6          | 52.1 | 118.6 |
| 43       | 4          | 55.0 | 119.0 |
| 44       | 2          | 57.9 | 119.4 |
| 45       | 0          | 60.8 | 120.0 |

Таблица 3: Параметры системы:  $\alpha$  – угол наклона зеркала относительно горизонтали,  $\alpha_0$  – угол падения света на дифракционную решетку,  $Y$  – координата центра решетки,  $L$  – длина центрального луча.