

**Методические рекомендации по
подготовке к ГАК**

для студентов специальности «физика»

*Емелъянов Эдуард Владимирович
Емелъянова Алёна Викторовна*

Оглавление

Введение	6
Механика	9
1 Кинематика Материальной точки и Абсолютно твердого тела	10
2 Динамика материальной точки	13
3 Канонические уравнения Гамильтона	19
4 Законы сохранения	21
5 Законы изменения и сохранения механической энергии	23
6 Законы изменения и сохранения момента импульса	27
7 Неинерциальные системы отсчета	31
8 Основы Специальной Теории Относительности	34
9 Динамика абсолютно твердого тела	39
10 Деформации	46
11 Механика жидкостей и газов	49
12 Движение вязкой жидкости	54
13 Колебательное движение	60
14 Вынужденные колебания	65
15 Волны в сплошной среде и элементы акустики	67
Молекулярная физика и термодинамика	73
16 Статистический подход к описанию молекулярных явлений	74
17 Идеальный газ	77
18 Статистика идеального газа	81
19 Теория флуктуаций	85
20 Брауновское движение	87
21 Термодинамический подход к описанию молекулярных явлений .	93
22 Теплоемкость системы	95
23 Начала термодинамики	99
24 Реальные газы	104
25 Термодинамические потенциалы	110
26 Твердые тела	113
27 Фазовые переходы	118
28 Явления переноса	121
29 Жидкое и плазменное состояния вещества	125

Электричество и магнетизм	133
30 Электростатическое поле	134
31 Потенциальность электрического поля	137
32 Проводники в электростатическом поле	139
33 Диэлектрики в электрическом поле	141
34 Электронная теория поляризации диэлектриков	143
35 Постоянный электрический ток	146
36 Квазистационарное приближение в электродинамике	149
37 Магнитное поле квазистационарных токов	152
38 Магнитное поле в сплошной среде	155
39 Магнетики	157
40 Явление электромагнитной индукции	162
41 Электромагнитные колебания в контуре	164
42 Механизмы электропроводности твердого тела	169
43 Основы квантовой теории твердого тела	173
44 Уравнения Maxwella	179
45 Релятивистская динамика и кинематика	183
46 Электродинамика движущихся сред	189
47 Плоские электромагнитные волны в прозрачном веществе	192
48 Явление интерференции	199
49 Явление дифракции	204
50 Дифракция в оптических приборах и спектральный анализ	211
51 Дисперсия диэлектрической проницаемости	214
52 Поляризация света, граничные эффекты	217
53 Оптическое излучение	223
54 Излучение света атомами и молекулами	225
55 Дуализм явлений микромира	229
Атомная и ядерная физика, элементарные частицы	235
56 Элементарная теория атома водорода	236
57 Основы квантовой механики	241
58 Одномерные квантовомеханические задачи	247
59 Одноэлектронный атом	253
60 Многоэлектронные атомы	256
61 Атом во внешнем поле	262
62 Химическая связь. Молекулы	267
63 Основы квантовой теории твердого тела	271
64 Представление о квазичастицах	276
65 Идеальные системы в статистической механике	281
66 Физическая кинетика	283

67	Свойства атомных ядер	289
68	Радиоактивность	297
69	Нестационарная теория возмущений	301
70	Нуклон–нуклонное взаимодействие	303
71	Частицы и взаимодействия	309
72	Сильные и слабые взаимодействия	316
73	Нуклеосинтез	320
74	Взаимодействие частиц с веществом	322
Список сокращений		329
Основные постоянные		331
Важнейшие формулы векторного анализа		333
Связь между некоторыми единицами		335
Литература		336
Предметный указатель		337

Электричество и магнетизм

30 Электростатическое поле

Закон Кулона

Экспериментально Кулон установил, что сила взаимодействия зарядов обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, а силы взаимодействия заряда A с зарядами B и C пропорциональны зарядам: $F_{AB}/F_{AC} = q_B/q_C$. Таким образом, **закон Кулона**:

$$F = f \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad \vec{F} = f \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}.$$

В СГСЭ $f = 1$, в СИ $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Потенциал. Вектор напряженности электрического поля

Напряженность электрического поля (ЭП) E — сила, действующая на единичный положительный пробный заряд со стороны другого заряда. Т.е. *напряженность — силовая характеристика поля*.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{F} = q\vec{E}.$$

Работа по перемещению заряда из точки (1) в точку (2) равна разности потенциальных энергий заряда в этих точках:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}(r) d\vec{r} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \vec{r} \frac{d\vec{r}}{r^3} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = W_{p1} - W_{p2}.$$

Потенциальная энергия $W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const}$. Полагая $\text{const} = 0$, получим: $W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$. **Потенциал** — потенциальная энергия единичного положительного заряда в ЭП:

$$\varphi = \frac{W_p}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{q}{r}.$$

Потенциал численно равен работе, совершенной по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Потенциал связан с напряженностью посредством оператора градиента:

$$\vec{F} = -\text{grad } W_p, \Rightarrow q\vec{E} = -\text{grad } W_p, \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\text{grad } \varphi}.$$

Напряженность ЭП удовлетворяет **принципу суперпозиции электрического поля**: $\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n$.

Поток напряженности электрического поля

Индукция (смещение) ЭП, D — еще одна характеристика ЭП. Она равна $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}$. В СГСЭ индукция и напряженность ЭП в вакууме равны.

Поток векторной величины \vec{a} есть величина, равная $\Phi_{\vec{a}} = \oint_S \vec{a} d\vec{S}$. Очевидно, что $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \Phi_D$.

Вычислим поток электрической индукции через замкнутую сферическую поверхностью радиуса R вокруг точечного положительного заряда q :

$$\Phi_D = \oint_S D dS = 4\pi R^2 D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = q.$$

Таким образом, поток электрической индукции через замкнутую поверхность равен заряду, заключенному внутри этой поверхности. Это утверждение справедливо и для поверхностей любой формы и называется **теоремой Остроградского–Гаусса для электростатического поля**:

$$\boxed{\Phi_D = \sum q_i}$$

Т.к. $\oint \vec{a} d\vec{S} = \int \operatorname{div} \vec{a} dV$, поток индукции равен $\Phi_D = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV$. Сумма зарядов $\sum q_i = \int_V \rho dV$, где ρ — **объемная плотность заряда**. Для любого объема V справедливо соотношение $\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV$. Отсюда получим **уравнение Пуассона**:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}, \quad \text{или} \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}.$$

Для электрических зарядов справедлива **теорема Ирншоу**: *система зарядов, расположенных в пространстве на любом расстоянии друг от друга, не может находиться в покое в отсутствии внешних сил*. Доказательство этой теоремы очевидно, т.к. между любыми зарядами действуют кулоновские силы притяжения или отталкивания, т.е. в отсутствии внешних сил заряды всегда будут двигаться.

Электрический диполь. Поле диполя

Диполь электрический — система, состоящая из положительного и отрицательного зарядов q , расположенных на расстоянии l друг от друга. Характеристика диполя — **дипольный момент**: $\vec{p} = ql$ (\vec{l} направлен от отрицательного заряда к положительному). В электрическом поле на диполь действует момент силы $\vec{M} = q\vec{l}\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Энергия диполя $W = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE \sin \alpha d\alpha = -pE \cos \alpha = -\vec{p}\vec{E}$, где α – угол между p и E .

В неоднородном поле на диполь помимо момента сил действует сила, смещающая его из положения равновесия: $F = qE + qE' = q(E + l\frac{dE}{dx} - E) = p\frac{dE}{dx}$, таким образом, $\boxed{\vec{F} = p \operatorname{grad} E}$. В однородном поле $\operatorname{grad} E = 0$, следовательно, и $F = 0$.

Найдем напряженность и потенциал поля диполя.

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = \frac{q \vec{l} \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3}.$$

Т.к. $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, получим:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{grad} \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

Квадрупольный момент

Пусть заряд q распределен в некоторой области пространства. Поле вне области распределения заряда удобно представить в виде бесконечного ряда с быстро убывающими членами:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad |\vec{r}| \gg |\vec{r}'|; \\ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'} + z' \frac{\partial}{\partial z'} \right)^n \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \vec{r}' \vec{r} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\substack{\aleph=x,y,z \\ \beth=x,y,z}} (3\aleph' \beth' - r'^2 \delta_{\aleph, \beth}) \aleph \beth + \dots . \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{pr}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\aleph=x,y,z \\ \beth=x,y,z}} Q_{\aleph \beth} \frac{\aleph \beth}{r^5} + \dots \right). \end{aligned}$$

Благодаря быстрой сходимости этого ряда, обычно ограничиваются первыми несколькими членами: $q = \int_V \rho(r') dV'$ – **полный заряд**; $\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$ – **дипольный момент**; $Q_{\aleph \beth} = \int_V (3\aleph' \beth' - r'^2 \delta_{\aleph, \beth}) \rho(r') dV'$ – **квадрупольный момент**.

31 Потенциальность электрического поля

Калибровочная инвариантность

К.и. имеет место в тех случаях, когда не все поля, участвующие в формулировке теории, отвечают наблюдаемым величинам. С помощью к.и. строится калибровочное поле. Например, уровни энергии и сечения различных процессов, вычисленные при использовании к.и., и с помощью исходных полей совпадают.

К.и. можно рассматривать, как переход к другому базису в пространстве–времени. К.и. используется для описания взаимодействий фотонных и электрон–позитронных полей. К.и. означает, что существует возможность независимого выбора «направлений» заряда в различных точках пространства–времени. Чтобы этот выбор был однозначным, вводятся граничные условия, задающие начальное (в момент времени равным 0) и граничное (на бесконечности) состояние системы (поля, отдельных его частей).

На часть компонент калибровочного поля, которые меняются произвольным образом при калибровочных преобразованиях, накладывают дополнительное условие — условие калибровки. Наиболее используемые условия калибровки: кулоновская калибровка, $\partial_i A_i = 0$, $i = \overline{1, 2, 3, \dots}$ и лоренцова калибровка.

К.и. позволяет на основе единого принципа объяснить всю иерархию существующих в природе взаимодействий.

Уравнение Лапласа

Общая задача электростатики: имеется система зарядов и известны их потенциалы, требуется определить потенциал в произвольной точке пространства. Эта задача решается при помощи уравнения Лапласа.

Электрическое поле является потенциальным, т.е. циркуляция ЭП в любой его точке равна нулю:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Дифференциальной формой уравнения Остроградского–Гаусса является уравнение Пуассона $\operatorname{div} E = \rho/\epsilon_0$. Так как $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, то $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\rho/\epsilon_0$. А т.к. $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi$, где Δ – **оператор Лапласа** (лапласиан), получим **уравнение Лапласа:** $\boxed{\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0}$. Если в системе отсутствуют свободные заряды, то $\Delta \varphi = 0$.

Роль граничных условий

Рассмотрим некоторую поверхность с распределенным по ней зарядом. Электрическое поле по разные стороны поверхности направлено в противоположных направлениях, т.е. напряженность поля испытывает скачок у рассматриваемой поверхности.

Уравнения, связывающие напряженность ЭП по разные стороны поверхности, называются **граничными условиями**. $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0, \Rightarrow \Phi_E = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = q/\varepsilon_0 = S(E_{2n} - E_{1n})$. На боковой поверхности $\Phi = 0$, т.к. ее площадь исчезающе мала. Следовательно, **граничные условия для нормальной составляющей ЭП E_n** :

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma,$$

где σ – **поверхностная плотность заряда**.

$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} = \oint_{L1} E d\vec{l} + \oint_{L2} E d\vec{l} = 0$, следовательно, $\oint_{L1} E d\vec{l} = -\oint_{L2} E d\vec{l}$, а т.к. $\oint_L E d\vec{l} = -E_\tau L$, получим **граничные условия для касательной составляющей ЭП E_τ** :

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad D_{2\tau} = D_{1\tau}.$$

Энергия системы зарядов

Для одного заряда $W = \frac{1}{2}\varphi q$, для системы N зарядов $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$. **Сила электрического тока:** $I = \frac{dq}{dt}$, **плотность тока:** $j = \frac{dI}{dS}$. $\oint_S j dS = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \Rightarrow \operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Т.к. $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} E$, получим: $j = -\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$.

Мощность ЭП: $P = \frac{dA}{dt} = \frac{q \vec{E} d\vec{r}}{dt} = q \vec{E} \vec{v} = \int_V \vec{E} \vec{j} dV = -\varepsilon_0 \int_V E \frac{\partial E}{\partial t} dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V E^2 dV$. Тогда **энергия ЭП** $W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV$.

Плотность энергии ЭП: $w = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$.

32 Проводники в электростатическом поле

Напряженность электрического поля у поверхности и внутри проводника

Если заряды проводника находятся в равновесии, то напряженность ЭП внутри него должна быть равна нулю, иначе под ее влиянием заряды пришли бы в движение.

Из уравнения Пуассона $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ следует, что внутри проводника заряды отсутствуют: $\rho^{(i)} = 0$, т.е. они расположены только на его поверхности. Из условия симметрии следует, что $\vec{E} = \vec{E}_n$, а поверхность проводника является **эквипотенциальной** (на ней $\operatorname{grad} \varphi = 0$).

Если проводник — бесконечная плоскость, то по теореме Гаусса $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, где σ — **поверхностная плотность заряда**. На поверхности проводника $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Т.к. весь заряд расположен по поверхности проводника равномерно, $\sigma = q/S$.

Если из проводника вынуть внутреннюю часть, заряды все равно будут расположены по поверхности, внутри $E = 0$.

Если замкнутый полый проводник внести во внешнее ЭП, то на нем появятся индуцированные заряды, сосредоточенные на поверхности, напряженность ЭП внутри проводника так и останется равной нулю. Т.е. такой проводник является экраном от внешних электрических полей (**электростатическая защита**). Для защиты чувствительных приборов их помещают в замкнутые металлические ящики, которые заземляют.

Однако, следует учитывать, что замкнутая проводящая поверхность не экранирует внешнюю среду от зарядов, размещенных внутри нее.

Переменные поля и токи в массивных проводниках. Скин–эффект

В случае постоянного тока его плотность, j , одинакова в любой точке проводника, однако переменный ток имеет большую плотность у поверхности и меньшую в центре проводника — **скин–эффект**.

Согласно **уравнениям Максвелла**, $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} = \gamma \vec{E}$.

Дифференциальный закон Ома: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Следовательно, $-\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, т.к. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$, получим: $\Delta \vec{E} = \gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, $\Delta \vec{H} = \gamma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$.

Пусть ток течет вдоль оси OX . Тогда $j = j_x$, $E = E_x(y, t)$, $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t}$.

Если ω – частота переменного тока, то $E_x = E_{x0} \exp(i\omega t)$, следовательно, $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 2ip^2 E_x$, $p^2 = \mu\gamma\omega/2$, $\Rightarrow E_{x0} = A_0 \exp(kx) + B_0 \exp(-kx)$, $k^2 = 2ip^2$, $k = p(1+i)$. Т.о., $E_{x0} = A_0 e^{py} e^{ipy} + B_0 e^{-py} e^{-ipy}$, т.к. $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{py} = \infty$, то $A_0 = 0$, $E_x = B e^{-py} e^{i(\omega t - py)}$ или $E_x = B e^{-py} \cos(\omega t - py)$, т.е. $j_x(y) = e^{-py} j_0 \cos(\omega t - py)$.

На расстоянии $\Delta = 1/p$ от поверхности проводника плотность тока в e раз меньше, чем на поверхности. $\Delta = \sqrt{2/(\omega\gamma\mu)}$. Таким образом, высокочастотный переменный ток «вытесняется» на поверхность проводника. При наличии сильного скин-эффекта внутри проводника отсутствует и МП.

Скин-эффект позволяет собирать линии СВЧ из полых труб (волноводов), покрытых тонким слоем серебра.

Связь заряда и потенциала. Электроемкость. Конденсаторы

Для точечного заряда $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$, для системы зарядов $\varphi = \sum \varphi_i$, следовательно, для протяженных тел

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Очевидно, что $\varphi \propto q$: $q = C\varphi$, где **электрическая емкость тела**. Для одиночного заряда $C = q/\varphi = 4\pi\epsilon_0 r$. Если заряд расположен в какой-либо среде, то $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$, где ϵ – **диэлектрическая проницаемость среды**.

Конденсатор – система двух одинаково и противоположно заряженных тел.

Плоский конденсатор. $\varphi = \int_0^d E dx = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \int_0^d dx = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0}$, где d – расстояние между

пластинаами конденсатора. Следовательно, $C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d}$

Шаровой конденсатор. $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$, где a и b – внутренний и внешний радиус конденсатора соответственно. $C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{1/a - 1/b}$. В случае, когда $b - a \ll b$,

$$C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Цилиндрический конденсатор. $\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$, $C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln(b/a)}$. При $d = b - a \ll$

$b, \ln(b/a) \approx d/a$. Тогда $C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$, где S – площадь единицы длины конденсатора.

Т.о., в случае малого расстояния между обкладками конденсатора, его емкость $C = \varepsilon \varepsilon_0 S/d$ не зависит от формы конденсатора.

Для системы N проводников $q_i = \sum_{k=1}^N C_{ik} \varphi_k$, где C_{ik} – взаимная емкость i -го и j -го проводников.

Энергия заряженного конденсатора. $W = \int_0^q \varphi dq = q^2/C$, или $W = \int_0^U C \varphi d\varphi = CU^2/2 = qU/2$, где U – напряжение на обкладках конденсатора.

33 Диэлектрики в электрическом поле

Вектор поляризации. Свободные и связанные заряды

На нейтральных диэлектриках в ЭП появляются **поляризационные заряды** за счет смещения электронных оболочек молекул или их разворота (**поляризация**). Материалы приобретают электрический момент $p = ql$. **Вектор поляризации** – электрический момент единицы объема: $\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i$, или $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$.

Для изотропных диэлектриков $\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$, где κ – **диэлектрическая восприимчивость**. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными.

Поле в диэлектрике $\vec{E}_{\text{микро}} = \vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}_{\text{связ}}$. Микроэлектрическое поле сильно меняется внутри диэлектрика, среднее поле: $E = \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{связ}} \rangle = \vec{E}_0 + \vec{E}'$.

В плоском диэлектрике $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$, где σ – поверхностная плотность заряда. $E' = -\sigma'/\varepsilon_0$, где σ' – поверхностная плотность связанных зарядов. $E = (\sigma - \sigma')/\varepsilon_0$. Т.о., внутри диэлектрика напряженность ЭП такая, как у конденсатора с $\sigma = \sigma - \sigma'$. Величина $q = (\sigma - \sigma')S$ называется **свободным зарядом**.

Вектор электрической индукции

$$\operatorname{div} E = (\rho + \rho')/\varepsilon_0, \quad \int_V \operatorname{div} \vec{p} dV = - \oint_S \vec{p} d\vec{S} = \int_V \rho' dV. \quad \text{T.e. } \operatorname{div} \vec{P} = -\rho'.$$

$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$. Вектор $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ называют **электрической индукцией** (смещением).

Для изолированного проводника $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0(1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 E$, где $\varepsilon = 1 + \kappa$ – **диэлектрическая проницаемость** вещества.

Термодинамическое описание диэлектриков

$$\delta Q = dU + \sum A_i da_i = dU + \delta A, \quad dA = -\sum \varphi_i \vec{E} d\vec{r}_i = \vec{E} d\vec{P} = -d \left(\frac{EP}{2} \right).$$

$$\delta Q = TdS, \Rightarrow TdS = dU - E dP \text{ или } dU = TdS + E dP.$$

Тензор диэлектрической восприимчивости

В анизотропных диэлектриках: $P_{\aleph} = \varepsilon_0(\kappa_{\aleph x}E_x + \kappa_{\aleph y}E_y + \kappa_{\aleph z}E_z)$, $\aleph = \overline{x, y, z}$. κ_{\aleph} – симметричный тензор второго ранга, **тензор диэлектрической восприимчивости**.

Т.к. $\varepsilon = 1 + \kappa$, то тензор диэлектрической проницаемости:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \kappa_{xx} & 1 + \kappa_{xy} & 1 + \kappa_{xz} \\ 1 + \kappa_{yx} & 1 + \kappa_{yy} & 1 + \kappa_{yz} \\ 1 + \kappa_{zx} & 1 + \kappa_{zy} & 1 + \kappa_{zz} \end{pmatrix}; \quad D_{\aleph} = \sum_{\beth=\overline{x,y,z}} \varepsilon_{\aleph \beth} E_{\beth}.$$

Энергия диэлектрика во внешнем электрическом поле

Плотность энергии ЭП в среде $w = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 / 2 = ED / 2 = D^2 / (2\varepsilon \varepsilon_0) = \vec{E} \vec{D} / 2$. $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, $w = \varepsilon_0 \vec{E}^2 / 2 + \vec{E} \vec{P} / 2 = w_{\text{вак}} + \vec{E} \vec{P} / 2$. Где $w_{\text{вак}}$ – плотность энергии ЭП в вакууме.

Работа по поляризации единицы объема $dA = \sum q_i \vec{E} d\vec{r}_i = \vec{E} d(\sum q_i \vec{r}_i) = \vec{E} d\vec{P} = d(\vec{E} \vec{P} / 2)$. Значит, $A = \vec{E} \vec{P} / 2$ – работа по поляризации единицы объема диэлектрика. Т.о., $w = w_{\text{вак}} + w_{\text{поляр}}$, $w = \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{ij} E_i E_j$.

Пондеромоторные силы в электрическом поле

На любое тело в ЭП действуют **пондеромоторные силы** (силы, которые действуют на тело в целом, а не только на заряды внутри него). Вычислим силу притяжения пластин конденсатора, отключенного от источника питания: $\delta A = F dx$, $dW = -\frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 S dx$, $\Rightarrow F = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 S$, на единицу площади действует сила $f = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = w$.

Т.о., пондеромоторные силы легко вычислить при помощи ЗСЭ: $\delta A = -dW$, $F_{\text{понд}} dx = -dW$.

В общем случае поверхностная пондеромоторная сила f – тензор второго ранга, который называют **тензор натяжений**:

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}.$$

Величины $f_{\text{н}} \Box$ характеризуют поверхностные силы, приложенные к поверхности объема V . Т.к. $f = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$, $\hat{f} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \hat{\varepsilon}$, $\Rightarrow f_{\text{н}} \Box = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{н}} \Box E^2$.

Если заряд распределен по объему V с объемной плотностью ρ , то в электрическом поле на него действует сила: $\vec{F} = \int \rho \vec{E} dV$. Сила, действующая на диполь, является суммой сил, действующих на заряды диполя. Учитывая, что $p = ql$, сила, действующая на диполь, равна: $\vec{F} = (\vec{p} \nabla) \vec{E}$.

На диполь действует пара сил, момент которой относительно центра диполя равен $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. Он стремится повернуть момент диполя, \vec{p} , до совпадения с направлением поля, \vec{E} . Поскольку дипольный момент элемента объема dV поляризованного диэлектрика, находящегося в электрическом поле, \vec{E} , равен $d\vec{p} = \vec{P} dV$, на этот элемент объема действует сила $d\vec{F} = (d\vec{p} \nabla) \vec{E} dV$.

На элементарные объемы диэлектрика действуют силы, стремящиеся сдвинуть эти объемы в направлении максимальной скорости возрастания напряженности ЭП. Иначе говоря, элемент объема диэлектрика увлекается в сторону больших полей: $\vec{F} \propto \text{grad } E^2$.

34 Электронная теория поляризации диэлектриков

Локальное поле. Полярные и неполярные диэлектрики

Диэлектрики можно разделить на полярные (полярная молекулярная связь) и неполярные (ковалентная связь).

У полярных диэлектриков все молекулы — диполи, и в отсутствие внешнего ЭП существует собственное локальное поле. Но, вследствие теплового движения, молекулы располагаются хаотично, следовательно, суммарное поле (макрополе) у диэлектрика равно нулю, хотя микрополе резко изменяется от точки к точке.

При внесении диэлектрика в ЭП, диполи ориентируются параллельно полю — **ориентационная** (диполярная) **поляризация**. У молекулярных кристаллов во внешнем поле происходит сдвиг решеток положительных и отрицательных ионов — **ионная поляризация**.

У многих веществ молекулы нейтральны. В грубом приближении будем считать молекулу совокупностью двух противоположно заряженных сфер с совпадающими центрами. В ЭП они смещаются, образуя диполь. В слабых ЭП $\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}'$ — **электронная поляризация смещения** (α — молекулярная диэлектрическая восприимчивость).

Функция Ланжевена. Формула Клаузиуса–Моссотти

Формула Ланжевена–Дебая выражает зависимость диэлектрической проницаемости ε **полярного диэлектрика** от поляризуемости α составляющих его частиц и от их концентрации n :

$$\varepsilon = 1 + n \left(\alpha + \frac{p^2}{3kT\varepsilon_0} \right), \quad \text{или} \quad \varkappa = n\alpha + \frac{p^2n}{3kT\varepsilon_0},$$

где n – концентрация. $\varkappa_e = \alpha n$ – диэлектрическая восприимчивость за счет электронной поляризации; $\varkappa_0 = \frac{p^2n}{3kT\varepsilon_0}$ – … за счет ориентационной поляризации.

Действительно, у неполярных диэлектриков $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}'$, $\vec{P} = n\vec{p} = \alpha n\varepsilon_0\vec{E}'$, а т.к. $\vec{P} = \varkappa\varepsilon_0\vec{E}'$, получим: $\boxed{\varkappa = \alpha n}$.

У **полярных диэлектриков** внутренняя энергия $W = -\vec{p}\vec{E}$. Т.к. минимум энергии соответствует параллельной ориентации \vec{p} и \vec{E} , диполи ориентируются параллельно полю, однако, тепловое движение в равновесном состоянии несколько расстраивает их ориентацию. Пусть θ – угол между \vec{p} и \vec{E} , \vec{E} ориентирован вдоль OZ . Тогда $W = -pE \cos \theta = -p_z E$. Согласно распределению Больцмана, получим число молекул, чьи вектора поляризации \vec{p} лежат в конусе $d\Omega$: $dN = A_0 \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{kT}\right) d\Omega = A_0 \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{kT}\right) d\alpha \sin \theta d\theta$, т.е.

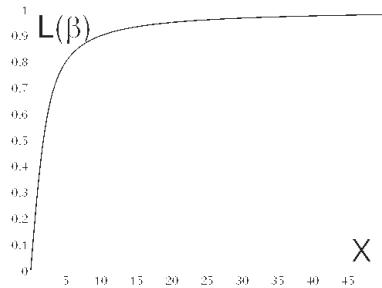
$$\langle p_z \rangle = \frac{\int p_z dN}{\int dN} = \frac{\int_0^\pi p \int_0^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \int_0^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta}, \quad \beta = \frac{pE}{kT}.$$

Пусть $\mathfrak{I} = \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta$. Числитель предыдущей формулы есть $\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial \beta}$. $\mathfrak{I} = \int_{-1}^1 e^{\beta x} dx = \frac{1}{\beta} e^{\beta x} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{\beta} \operatorname{sh} \beta$, $\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta} (\operatorname{ch} \beta - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta})$, \Rightarrow

$$\langle p_z \rangle = pL(\beta), \quad \text{где} \quad \boxed{L(\beta) = \operatorname{cth} \beta - \frac{1}{\beta}} \quad \text{– функция Ланжевена.}$$

В слабых полях ($pE \ll kT$, т.е. $\beta \ll 1$) $\operatorname{cth} \beta \approx \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{3}$, $\Rightarrow L \approx \frac{\beta}{3}$. $\langle p_z \rangle = \frac{p\beta}{3} = \frac{p^2 E}{3kT}$, $\Rightarrow \varkappa_0 = \frac{\langle p_z \rangle n}{\varepsilon_0 E} = \frac{p^2 n}{3kT\varepsilon_0}$.

В очень сильных полях $\beta \gg 1$, т.е. $L \sim 1$: $\langle p_z \rangle \approx p$. Следовательно, происходит насыщение внутреннего поля до величины $\boxed{E_{\text{нac}} = \frac{kT}{p}}$, и оно перестает расти.



Формула Клаузиуса–Моссотти приближенно выражает зависимость ε неполярного диэлектрика от α и n :

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n \alpha, \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{4\pi}{3} N_A \alpha,$$

где M – молекулярная масса вещества, ρ – его плотность, N_A – число Авогадро. Данная формула справедлива для всех неполярных диэлектриков, для которых выполняется соотношение $E_{\text{микро}} = E_{\text{макро}} + \frac{4\pi}{3} P$, где $E_{\text{микро}}$ – локальное микрополе, $E_{\text{макро}}$ – среднее макрополе, P – поляризация диэлектрика (дипольный момент единицы его объема).

Если в диэлектрике содержится k сортов частиц, производится суммирование по всем сортам:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum n_k \alpha_k.$$

Формула Клаузиуса–Моссотти носит приближенный характер ввиду невозможности в общем случае дать рациональное объяснение понятию частиц, из которых состоит диэлектрик.

Теорема Остроградского–Гаусса применительно к диэлектрикам

В отсутствие диэлектрика поток напряженности ЭП равен $\Phi_E = q/\varepsilon_0$, $D = \varepsilon_0 E$, $\Rightarrow \Phi_D = q$.

В диэлектрике поток индукции $\Phi_D = \oint_S \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon \varepsilon_0 \Phi_E$.

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0}, \Rightarrow [\Phi_D = q].$$

Т.о. в диэлектриках теорема Остроградского–Гаусса имеет тот же вид, что и в их отсутствии (для потока индукции ЭП), для потока напряженности $\Phi_D = \varepsilon \varepsilon_0 q$. Аналогично и для дифференциальной формы теоремы О–Г: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV$, $\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV$, $\Rightarrow [\operatorname{div} \vec{D} = \rho]$, $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho$.

Границные условия в кусочно-однородной среде

В кусочно-однородной среде для напряженности и индукции ЭП существует два граничных условия: $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$. $\oint_S \vec{E} d\vec{l} = 0$ (т.к. $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$), значит, вдоль замкнутого контура, проведенного вокруг границы раздела сред, $E_{1\tau} l - E_{2\tau} l + \langle E_{\text{бок}} \rangle \cdot 2h = 0$. Максимально приближая контур к границе,

получим: $\langle E_{бок} \rangle = 0$, $\Rightarrow [E_{1\tau} = E_{2\tau}]$. Аналогично, $\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}$, $\Rightarrow \boxed{\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$ — **границы условия** для касательных составляющих E и D для поверхности раздела диэлектриков.

ГУ для нормальных составляющих получим из условия $\Phi_D = \Phi_E = 0$ в случае отсутствия сторонних зарядов на границе раздела диэлектриков.

Рассмотрим цилиндрический участок поверхности раздела с площадью основания S и исчезающей малой высотой: $D_{1n}S + D_{2n}S + \underbrace{\langle D_{бок} \rangle S_{бок}}_{\rightarrow 0} = 0$, \Rightarrow проектируя составляющие индукции на одну и ту же нормаль, получим: $D_{1n} = D_{2n}$. И аналогично $\boxed{\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Т.о., при переходе через границу диэлектриков D_n и E_τ меняются непрерывно, а D_τ и E_n преломляются. Пусть α_1 — угол между электрическим полем и нормалью к границе раздела сред в первой среде, α_2 — … во второй среде. Тогда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{1\tau}/D_{1n}}{D_{2\tau}/D_{2n}} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \varepsilon_{12},$$

где ε_{12} — **относительная диэлектрическая проницаемость** двух сред.

35 Постоянный электрический ток

Сила и плотность тока

Электрический ток — любое движение электрических зарядов. **Линия тока** — траектории движения зарядов. **Трубка тока** — воображаемая трубка, боковая поверхность которой состоит из линий тока.

Плотность тока — заряд, проходящий через единицу поверхности трубы тока за единицу времени. Она равна количеству заряда в трубке тока единичной площади и длины, равной средней скорости движения зарядов v : $\vec{j} = ne\vec{v}$, где e — заряд одной частицы.

За время dt через трубку пройдет заряд $dq = \vec{j}d\vec{S}dt$. **Сила тока** — заряд, проходящий за единицу времени через поперечное сечение проводника: $I = dq/dt$, $\Rightarrow I = \int_S \vec{j}d\vec{S}$.

Уравнения непрерывности и стационарности

Рассмотрим замкнутую поверхность. Количество втекающих в нее зарядов равно количеству вытекающих, получим **уравнение непрерывности**:

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Т.к. $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV$, а $q = \int_V \rho dV$, получим дифференциальную форму уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}.$$

Если токи стационарны, то все характеризующие их элементарные величины не зависят от времени, т.е. $\rho = \text{const}$, $I = \text{const}$. Получим **уравнение стационарности**: $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Электрическое напряжение. Сопротивление. Закон Ома

Напряжение, U , между точками A и B – работа по перемещению единичного положительного заряда из точки A в точку B : $U = \varphi_B - \varphi_A$.

Для любого проводника существует зависимость между напряжениями и токами, которая однозначна и линейна (получена экспериментально): $I = \Lambda U$ – **закон Ома**, здесь Λ – **электропроводимость** проводника. Если ввести **сопротивление** $R = \Lambda^{-1}$, закон Ома примет вид: $I = U/R$.

Экспериментально установлено, что для проводников выполняется зависимость $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ – **удельное сопротивление** проводника, l – его длина, S – поперечная площадь. Можно записать и так: $\Lambda = \lambda \frac{S}{l}$, где λ – **удельная проводимость** проводника. Очевидно, $\lambda = \rho^{-1}$.

Проводимость при нормальных условиях линейно зависит от температуры: $\rho = \rho_0(1 + \alpha[T - T_0])$, где $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$ – **температурный коэффициент сопротивления**. В небольших интервалах температур $\alpha \approx \text{const}$.

Получим **дифференциальный вид закона Ома**. $dI = \Lambda dU$, а т.к. $dI = j dS = E dl$, $\Rightarrow j dS = \Lambda E dl$, $\Lambda = \lambda dS/dl$, $\Rightarrow [j = \lambda E]$.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля–Ленца

Работа по перемещению единичного положительного заряда из одной точки в другую равна напряжению между этими точками, следовательно, работа по

перемещению заряда q равна $dA = q dU$, $dA/dt = I dU$, $dA = I dU dt$, $\Rightarrow A = UIt$. **Мощность** электрического тока $P = dA/dt = IU = U^2/R = I^2R$.

При прохождении тока через проводник выделяется тепловая энергия, количество которой можно рассчитать по **закону Джоуля–Ленца**: $Q = UIt$. Тепло, выделяемое переменным током, рассчитывается по формуле $Q = \int_0^t RI^2 dt$.

$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt$. Величина $Q_{\text{уд}} = \rho j^2$ называется **удельной тепловой мощностью тока**.

Аналогично, $dQ = \Lambda U^2 dt = \frac{\lambda dS}{dl} (E dl)^2 dt = \lambda E^2 dV dt$, $Q_{\text{уд}} = \lambda E^2$.

Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме: $Q_{\text{уд}} = \rho j^2 = \lambda E^2$.

Сторонние силы. Электродвижущая сила

Для получения постоянного тока на заряды должны действовать силы, отличные от электростатических — **сторонние силы**: $\vec{F}_{\text{стор}} = \vec{E}^* q$, где \vec{E}^* — напряженность поля сторонних сил.

Электродвижущая сила (ЭДС) — работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда: $\mathcal{E} = dA/dq$, $A = \int \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l} = q \int \vec{E}^* d\vec{l}$, \Rightarrow

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_{(AB)} \vec{E}^* d\vec{l}.$$

Для замкнутой цепи $\mathcal{E} = \oint \vec{E}^* d\vec{l}$.

Кроме сторонних сил на заряд действуют электростатические силы $\vec{F}_e = q \vec{E}$. Суммарная сила $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_{\text{стор}} = q(\vec{E} + \vec{E}^*)$, $A_{12} = q \int (\vec{E} + \vec{E}^*) d\vec{l} = q(\Delta\varphi_{12} + \mathcal{E}_{12})$. $U_{12} = \Delta\varphi_{12} + \mathcal{E}_{12}$ — **напряжение на участке цепи 1–2**.

Участок, на котором не действуют сторонние силы, называется **однородным**. Для него $U = \Delta\varphi$.

Разветвление цепей. Правила Кирхгофа

Правила Кирхгофа для разветвляющихся участков электрических цепей являются следствием законов сохранения.

Первое правило: сумма токов, втекающих в разветвляющийся участок проводников, равна нулю, $\sum I_k = 0$ (закон сохранения заряда). При этом за направление тока выбирается направление движения положительных зарядов, втекающие в узел токи считаются со знаком «плюс», вытекающие — со знаком «минус».

Рассмотрим некоторый замкнутый контур. Для каждого участка ab справедливо $U_{ab} = I_{ab}R_{ab} - \mathcal{E}_{ab}$. Так как суммарное напряжение на замкнутом контуре равно нулю, получим **второе правило Кирхгофа**: *сумма падений напряжения на участках замкнутого контура равна сумме ЭДС, действующих на этом участке, $\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k$.*

Первое правило Кирхгофа называют еще условием стационарности токов, а второе — следствием основного свойства электростатического поля ($\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$).

Пондеромоторные силы

На тело в электрическом поле действуют **пондеромоторные силы**. При перемещении проводников изменяется их взаимная емкость. Следовательно, чтобы напряжение между этими телами оставалось постоянным, к ним необходимо подводить заряды. Каждый источник тока совершает работу $\mathcal{E} dq = \mathcal{E} I dt$, при этом проводники будут выделять тепло Джоуля–Ленца $Q = RI^2 dt$. Работа источников тока идет на тепло Джоуля–Ленца, компенсацию работы пондеромоторных сил δA и изменение электрического поля. Значит, для них можно написать ЗСЭ:

$$\sum \mathcal{E} I dt = \delta A + dW + \sum RI^2 dt.$$

В случае, если все проводники и диэлектрики неподвижны, работа источников тока полностью превращается в тепло.

В случае, когда $q = \text{const}$, $\delta A + dW + \sum RI^2 dt = 0$, но тепло Джоуля–Ленца, связанное с перераспределением зарядов внутри проводника становится исчезающее мало. Значит, $\delta A + dW = 0$ — механическая работа сил ЭП идет на уменьшение его внутренней энергии.

36 Квазистационарное приближение в электродинамике

Постоянное магнитное поле. Взаимодействие токов

Электрический ток отклоняет магнитную стрелку; рамки с противоположно направленными токами, взаимно отталкиваются, следовательно, взаимодействие токов подобно действию токов на магнит и проявляется в **магнитном взаимодействии**.

Экспериментально установлено, что между двумя проводниками с током возникает сила $\frac{dF}{dl} = k \frac{I_1 I_2}{r}$, где r — расстояние между проводниками, dF/dl — удельная сила на единицу длины проводника.

Векторной характеристикой магнитного поля (МП) является **магнитная индукция** \vec{B} . Магнитное поле удовлетворяет условию **суперпозиции**: $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$.

Закон Ампера: $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = dq\vec{v} \times \vec{B}$.

Магнитная индукция есть сила, действующая со стороны магнитного поля на единицу длины проводника с единичным током.

Магнитное поле, создаваемое участком проводника с током длины dl на расстоянии r от проводника, определяется согласно **закона Био–Савара–Лапласа**:

$$d\vec{B} = k \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad k = \frac{\mu_0}{2\pi},$$

где μ_0 – **магнитная постоянная**.

Согласно закона Био–Савара–Лапласа, сила взаимодействия между двумя проводниками с током определится формулой:

$$d\vec{F} = k \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} \left(d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1 \vec{r}_{12}) - \vec{r}_{12} (d\vec{l}_1 d\vec{l}_2) \right).$$

Следует заметить, что, согласно СТО, \vec{E} и \vec{B} взаимно переходят друг в друга в различных СК.

Теорема о циркуляции индукции магнитного поля. Вихревой характер МП

Введем по аналогии с электрической индукцией вектор **магнитной напряженности** H . В вакууме $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$,

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} (\text{A/m}).$$

В природе не существует магнитных зарядов (хотя Дирак высказал предположение о возможном существовании магнитных монополей), значит, $\text{div } \vec{B} = 0$, т.е. поток вектора \vec{B} через замкнутую поверхность, равен нулю: $\Phi_B = 0$.

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{B} d\vec{S}$; $\vec{B} d\vec{l} = B dl_B = \frac{\mu_0}{2\pi} I d\alpha$, где α – угловая ширина отрезка $d\vec{l}$ со стороны проводника. Тогда $\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha = \mu_0 I$. Следовательно, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, или $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$.

Сравнивая с соответствующими уравнениями для ЭП ($\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$), можно понять, что силовые линии МП непрерывны, т.е. **МП носит вихревой характер**.

По аналогии с электрическим напряжением, можно ввести **магнитное напряжение**: $\oint \vec{H} d\vec{l} = U_m$.

Векторный потенциал

Т.к. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, удобно ввести функцию \vec{A} , такую, что $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ (т.к. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$). Величину \vec{A} называют **векторным потенциалом**. Следует отметить, что векторный потенциал не имеет физического смысла. Он определен с точностью до $\operatorname{grad} \chi$, где χ – некоторая произвольная функция координат (т.к. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$), поэтому введем дополнительное условие: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$, а т.к. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} -\Delta$, получим **уравнение Пуассона**:

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}.$$

Решим уравнение Пуассона. $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} dV}{r}$, $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \operatorname{rot}(\vec{j}/r) dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV$ – закон Био–Савара–Лапласа.

Основные уравнения квазистационарного приближения

Квазистационарными называются явления, меняющиеся достаточно медленно со временем.

Согласно уравнениям Максвелла, $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$, $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$.

ЭП не является потенциальным, т.к. $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$, значит, напряженность \vec{E} не может быть представлена как $\operatorname{grad} \varphi$.

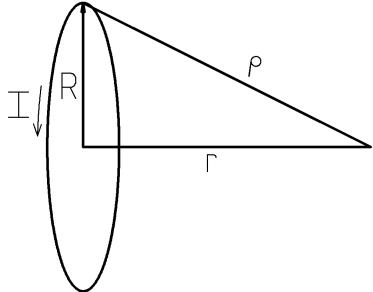
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$. Заменим $\operatorname{grad} \varphi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Тогда $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$, $\Rightarrow \operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \rho/\varepsilon_0$, тогда, т.к. $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ и $\operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, получим: $\Delta \varphi = -\rho/\varepsilon_0$ (как и в статическом случае).

Аналогично получим: $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$.

37 Магнитное поле квазистационарных токов

Элементарный ток и его магнитный момент



Элементарный ток — замкнутый ток с размерами, значительно меньшими расстояния до наблюдателя. Вычислим МП в точке, лежащей на оси э. тока на расстоянии r .

$$\frac{1}{4\pi} \frac{I dl \sin \beta}{\rho^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl R}{\rho^3}.$$

$$H = \frac{IR}{4\pi\rho^3} \int dl = \frac{IS}{2\pi\rho^3} \approx \frac{IS}{2\pi r^3} = \frac{p_m}{2\pi r^3},$$

где p_m — **магнитный момент** э. тока, вводимый по аналогии с *дипольным моментом*. $\vec{p}_m = IS\vec{n} = I\vec{S}$, где \vec{n} — вектор нормали к э. току.

Если э. ток поместить в МП, на него начинает действовать момент сил, совершающий элементарную работу $\delta A = M d\varphi$, $dA = F dx = IlB dx = IB dS$. Магнитный поток $\Phi = \int B dS$, $\Rightarrow \delta A = Id\Phi$, $A = I\Delta\Phi$. Тогда $M d\varphi = Id\Phi = ISB \sin \alpha d\alpha$, $\Rightarrow M = p_m B \sin \alpha$. Значит, момент сил стремится повернуть виток с током перпендикулярно МП: $\boxed{\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}}$.

Если МП неоднородно, то $F dx = Id\Phi$, $d\Phi = \frac{\partial B_n}{\partial x} dx dS$, $\Rightarrow F = p_m \frac{\partial B_n}{\partial x}$ или $\boxed{\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \text{grad}) \vec{B}}$, что в записи аналогично $\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \vec{B}$.
 $(\vec{p}_m \cdot \text{grad} = p_{mx} \frac{\partial}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial}{\partial z})$.

Дипольный магнитный момент тока. Магнитное поле в дипольном приближении

Векторный потенциал МП: $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} dV}{\rho}$, $\rho = |\vec{r} - \vec{R}|$. Разложим в ряд выражение $\frac{1}{\rho}$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \left(\sum_{\aleph=x,y,z} \aleph \frac{\partial}{\partial \aleph} \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} \Bigg|_{R=0},$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \sum x_\aleph x_\beth + \frac{1}{2r^5} \sum (3x_\aleph x_\beth - R^2 \delta_{\aleph\beth}) x_\aleph x_\beth + \dots,$$

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int_V \vec{j} dV + \frac{1}{r^3} \int_V \vec{j} dV + \frac{1}{2r^5} \int_V \sum (3x_\aleph x_\beth - R^2 \delta_{\aleph\beth}) x_\aleph x_\beth \vec{j} dV \right).$$

В последнем уравнении второе слагаемое – **дипольная составляющая МП**, третье – **квадрупольная составляющая**.

$\vec{j}dV = I d\vec{l}$, $\int_V \vec{j}dV = \oint I d\vec{l}$. Квадрупольный момент э. тока близок к нулю.

Тогда:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int \vec{j}(\vec{R}\vec{r}) dV.$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \vec{r} \times (\vec{I} \times \vec{R}) dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{R} \times \vec{j}) \vec{r} dV.$$

$$p_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{j} dV = \frac{1}{2} I \oint \vec{R} \times d\vec{l} = I \int d\vec{S} = I \vec{S}.$$

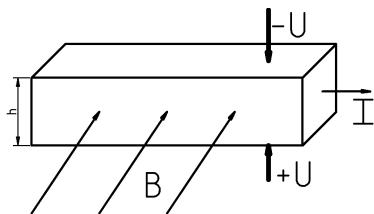
Сила Лорентца

Сила, действующая на проводник с током в МП: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. Но $I\vec{l} = Nq\vec{v}$, где N – полное число движущихся зарядов через поперечное сечение провода, \vec{v} – скорость их движения. Тогда $\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$. Сила, действующая на одну частицу, равна F/N : $\vec{F}_1 = q\vec{v} \times \vec{B}$.

Если помимо МП на заряды действует ЭП, полная сила, действующая на один заряд, равна $\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$ – **сила Лорентца**.

Эффект Холла

Эффект Холла – возникновение в проводниках поперечной разности потенциалов под воздействием МП. Э. Холла возникает за счет действия силы Лорентца на электроны, движущиеся в проводнике.



В слабом МП э. Холла линеен: $\boxed{U = R_H h j B}$, где R_H – **постоянная Холла** (зависит от рода вещества), h – толщина пластинки из проводника, j – плотность тока. Сила Лорентца $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ перераспределяя электроны, приводит к возникновению у граней пластиинки из проводника противоположных зарядов. За счет этого возникает поперечное ЭП \vec{E} .

В равновесии $Ee = evB$, $E = vB$, $\Rightarrow \boxed{U = vBh}$. $j = nev$, $U = jhB/(ne)$, $\Rightarrow \boxed{R_H = \frac{1}{ne}}$. Таким образом, измеряя при помощи э. Холла R_H , можно определить концентрацию свободных электронов в веществе.

Поток вектора магнитной индукции

Магнитный поток — $d\Phi = \vec{B} d\vec{S}$, $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$.

$\delta A = F dx = IlB dx = IB dS = I d\Phi$, $\Rightarrow A = \int_S I d\Phi = I \Delta\Phi$ — работа по перемещению проводника в МП.

Если проводник движется на МП, на его концах возникает разность потенциалов — **ЭДС электромагнитной индукции** (движение электронов за счет силы Лоренца).

ЭДС индукции \mathcal{E}_i равна работе по перемещению единичного положительного заряда в проводнике A_0 , работа по перемещению всех свободных зарядов равна: $\delta A = I d\Phi = dq \frac{d\Phi}{dt}$. Тогда $\delta A_0 = \frac{\delta A}{|dq|} = -\frac{d\Phi}{dt}$, т.к. $dq < 0$ (зарядами являются электроны).

Тогда $\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$ — **основной закон электромагнитной индукции**.

Знак « $-$ » соответствует **закону Ленца**: *индукционный ток во всех случаях направлен так, что его действие противоположно действию причины, этот ток вызывающей*.

Коэффициент самоиндукции (индуктивность) контура. Коэффициент взаимоиндукции

Т.к. в контуре $B \propto I$, можно написать: $\Phi = LI$, где коэффициент L называют **индуктивностью контура**. **Самоиндукция** — явление возникновения в контуре экстратоков, препятствующих изменению протекающего через контур тока: $\boxed{\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}}$.

Для катушки длины l , содержащей N витков, $B = \mu_0 NI/l$, поток, создаваемый одним витком $N_1 = \mu_0 NIS/l$. Суммарный поток $\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 N^2 SI/l$, \Rightarrow

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}}.$$

Рассмотрим два взаимодействующих контура: $\Phi_{12} = L_{12}I_1$ — магнитный поток, возникающий во втором контуре под воздействием первого, L_{12} — **коэффициент взаимной индукции** контуров 1 и 2. Аналогично, $\Phi_{21} = L_{21}I_2$.

Очевидно, что для любых двух контуров $L_{12} = L_{21}$: $\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$, $\mathcal{E}_1 = -L_{21} \frac{dI_2}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$.

Индукция МП первого контура $B = \mu_0 I_1 N_1 / l$, $\Phi_{12} = N_2 B S =$

$\mu_0 N_1 N_2 S I_1 / l, \Rightarrow L_{12} = \mu_0 N_1 N_2 S / l. \Phi_{21} = \mu_0 N_1 N_2 S I_2 / l, \Rightarrow L_{21} = \mu_0 N_1 N_2 S / l = L_{12}.$

38 Магнитное поле в сплошной среде

Вектор намагниченности и его связь с молекулярными токами

Молекулярный ток — элементарный ток, замыкающийся в пределах данного атома (будем считать, что он возникает за счет вращения валентных электронов). Таким образом, атомы обладают магнитным моментом $\vec{p}_m = I \vec{S}$. Из-за

этого магнетик приобретает общий магнитный момент $\vec{J} = \sum \frac{\vec{p}_m}{\tau}$ — **вектор намагничения**, где τ — физически малый объем, по которому производится суммирование. Т.о., вектор **намагничения является магнитным моментом единицы объема вещества**.

За счет молекулярных токов возникает молекулярная индукция B' , тогда суммарное МП $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$, где \vec{B}_0 — внешнее МП. $\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \vec{B}_0 + \text{rot } \vec{B}'$; $\text{rot } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}$, где \vec{j} — плотность макротока.

Аналогично можно написать: $\text{rot } \vec{B}' = \mu_0 \vec{j}_{\text{мол}}$, где $\vec{j}_{\text{мол}}$ — **плотность молекулярных токов**.

Рассмотрим совокупность молекулярных токов внутри косого цилиндра $S_{\text{мол}} \times dl$. Будем считать, что все \vec{p}_m коллинеарны. Тогда суммарный ток равен $I = I_{\text{мол}} n \vec{S}_{\text{мол}} dl = \vec{p}_m n dl = \vec{J} dl$.

$$I = \int_S \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S}, \int_S \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{J} dl = \int_S \text{rot } \vec{J} d\vec{S}, \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \vec{J}}.$$

Вектор напряженности МП

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \text{rot } \vec{J}$; $\text{rot}(\vec{B}/\mu_0 - \vec{J}) = \vec{j}$. Введем величину \vec{H} — **напряженность магнитного поля**: $\boxed{\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}}$. $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$, $\oint \vec{H} dl = \int \vec{j} dS, \Rightarrow \oint \vec{H} dl = \sum I_k$ — **циркуляция напряженности МП равна сумме охватываемых контуrom токов**.

В слабых МП намагничение пропорционально напряженности МП: $J = \chi H$, где χ — **магнитная восприимчивость** материала. $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \chi \vec{H}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0}$, где $\mu = 1 + \chi$ — **магнитная проницаемость**.

Тензор магнитной проницаемости

В анизотропных средах вектора \vec{J} и \vec{H} не коррелируют, следовательно $\vec{J} = \hat{\chi}\vec{H}$, где $\hat{\chi}$ – тензор магнитной восприимчивости. Аналогично можно ввести тензор магнитной проницаемости: $\hat{\mu} = \hat{1} + \hat{\chi}$, где $\hat{1}$ – тензор-единица, все элементы которого равны 1. Получим: $\vec{B} = \mu_0 \hat{\chi} \vec{H}$.

Магнитное поле в сплошных и кусочно-однородных средах

Границные условия в кусочно-однородной среде

Т.к. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, то $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$, \Rightarrow получим ГУ для нормальных составляющих индукции и напряженности МП в кусочно-однородных средах: $B_{n1} = B_{n2}$, \Rightarrow

$$\boxed{\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}.$$

Если на границах однородных участков отсутствуют токи, то $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, $\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$, \Rightarrow получим ГУ для касательных составляющих: $H_{\tau1} = H_{\tau2}$, \Rightarrow

$$\boxed{\frac{B_{\tau1}}{B_{\tau2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}.$$

Из полученных ГУ можно вывести **закон преломления МП** на границах однородных сред: $\boxed{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$.

Магнитное поле в полостях

Если в МП поместить тело с магнитной проницаемостью μ , превосходящей магнитную проницаемость окружающей среды $\mu_{\text{окр}}$, то линии МП будут сгущаться в этом теле, иначе – разрежаться.

Если же тело полое, и у него $\mu > \mu_{\text{окр}}$, то линии индукции МП будут сгущаться внутри тела, что приведет к уменьшению индукции в полости.

Таким образом можно защитить чувствительные приборы от воздействия внешних магнитных полей (но, следует иметь в виду, что, в отличие от электростатической защиты, магнитная защита не избавляет от МП полностью, лишь уменьшая его величину).

Методы измерения магнитного поля

На явлении электромагнитной индукции основаны простые методы измерения напряженности магнитных полей. Простейшим прибором, измеряющим напряженность МП, является **флюксметр**, представляющий собой катушку, соеди-

ненную с баллистическим гальванометром. Если катушку быстро повернуть в МП, отклонение стрелки гальванометра покажет прошедший через него индукционный заряд. Откалибровав гальванометр, можно таким образом измерять напряженность МП.

Для измерения магнитного напряжения $\int \vec{B} d\vec{S}$ применяется **пояс Роговского**, который представляет собой гибкий ремень, на который навита проводящая спираль в два слоя, идущие навстречу друг другу. Концы проводов выводят в одном месте. Для измерения магнитного напряжения пояс располагают между нужными точками вдоль заданной кривой. Затем выключают ток, создающий МП. Отброс баллистического гальванометра, к которому подсоединенны проводники пояса, пропорционален искомому магнитному напряжению.

39 Магнетики

Классификация магнетиков

Магнетики – вещества, способные изменять внешнее магнитное поле. Магнетики делятся на следующие виды: **диамагнетики** – вещества с $\chi < 0$ ($\mu < 1$), уменьшающие внешнее МП; **парамагнетики** – вещества с $\chi > 0$, увеличивающие внешнее МП; **ферромагнетики** – с $\chi \gg 0$, значительно увеличивающие внешнее МП и длительное время сохраняющие собственное поле после отключения внешнего МП.

Классическое описание диамагнетизма. Ларморова прецессия

Рассмотрим вещество, собственные магнитные моменты атомов которого направлены в пространстве хаотически, не создавая собственного макроскопического магнитного поля. Будем рассматривать атом как круговой ток с магнитным моментом $\vec{p}_m = -e\omega\vec{S}/(2\pi)$, где ω – круговая частота вращения электрона e . Момент импульса электрона $\vec{L} = m\vec{\omega}r^2 = m\vec{\omega}S/\pi$.

Введем **гиромагнитное отношение**: $\Gamma = p_m/L = -e/(2m)$.

Механический момент изменяется со скоростью, равной $\vec{L}' = \vec{L} \times \vec{\omega}_L$, где ω_L – частота ларморовой прецессии (ларморова частота).

Т.к. $\vec{\mu} = \vec{P}_m \times \vec{B}$, а $\vec{L}' = \vec{M}$, то $\vec{p}_m \times \vec{B} = \vec{L}' \times \vec{\omega}_L$, а т.к. магнитный момент направлен противоположно моменту импульса, $p_m B = -L \omega_L$, \Rightarrow

$$\omega_L = \frac{p_m B}{L} = |\Gamma| B = \frac{1}{2} \frac{eB}{m}.$$

Теорема Лармора: действие МП на движущиеся электроны заключается в наложении на первоначальное движение равномерного вращения вокруг вектора напряженности внешнего МП.

За счет прецессии появляется дополнительный круговой ток I' . $p'_m = I'S' = -e\frac{\omega_L}{2\pi}\pi r'^2 = -\frac{e\omega_L}{2}r'^2$ — **наведенный магнитный момент**.

Итак, в диамагнетиках $\chi = J/H < 0$. Обусловленный лармировым вращением диамагнетизм есть универсальное явление, наблюдающееся во всех средах. Однако, в тех случаях, когда атомы обладают собственными магнитными моментами, которые, к тому же, могут выстраиваться коллинеарно, диамагнетизм перекрывается более мощными парамагнетизмом и ферромагнетизмом.

Объяснение парамагнетизма по Ланжевену

Закон Кюри (получен экспериментально): *молярная магнитная восприимчивость вещества обратно зависит от его температуры, $\boxed{\chi_m = \mathfrak{C}T^{-1}}$.*

Классическую теорию парамагнетизма развил Ланжевен. Атом в МП обладает потенциальной энергией $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$, зависящей от угла между \vec{p}_m и \vec{B} . Равновесное распределение молекул подчиняется закону Больцмана, \Rightarrow

$$f(\theta) = \exp\left(\frac{p_m B \cos \theta}{kT}\right), \quad \theta = \angle(\vec{p}_m, \vec{B}).$$

Обозначим $a = \frac{p_m B}{kT}$.

При $B = 0$, $dP_\theta|_{B=0} = \frac{d\Omega_\theta}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$ — вероятность того, что угол θ лежит в интервале $(\theta, \theta + d\theta)$; $d\Omega$ — телесный угол $(\theta, \theta + d\theta)$.

При $B \neq 0$, $dP_\theta = A \exp(a \cos \theta) \cdot \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$. При малых B , учитывая малость p_m , получим: $a \ll 1$, $\Rightarrow dP_\theta = A(1 + a \cos \theta) \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$; $1 = \int_0^\pi A(1 + a \cos \theta) \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = A$, $\Rightarrow dP_\theta = \frac{1}{2}(1 + a \cos \theta) \sin \theta d\theta$. Пусть n — концентрация атомов, $dn_\theta = n dP_\theta$. Каждый атом вносит свой вклад $p_m \cos \theta$ в общую намагниченность, следовательно,

$$J = \int_0^\pi p_m \cos \theta dn_\theta = \frac{1}{2} np_m \int_0^\pi (1 + a \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{np_m a}{3}, \quad \boxed{J = \frac{np_m^2 B}{3kT}};$$

$$\chi = \frac{J}{H} = \frac{np_m^2 B}{3kTH}, \quad \boxed{\chi = \frac{\mu_0 np_m^2}{3kT}}.$$

Молярная магнитная восприимчивость:

$$\chi_m = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3kT} > 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathfrak{C} = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3k}}.$$

Квантовая теория парамагнетизма

Теория Ланжевена не применима к металлам, так как у них электроны проводимости образуют электронный газ, обладающий собственным парамагнетизмом.

По Ланжевену, $\langle p_m \rangle = p_{m0}L(a)$, $L = \operatorname{cth} a - \frac{1}{a}$ – **функция Ланжевена**. Но Ланжевен не учел, что значение $\cos \theta$ изменяется дискретно: проекция магнитного момента на силовые линии МП $p_{m_H} = m_j \Gamma \mu_B$, где m_j – **магнитное квантовое число**, μ_B – **магнетон Бора**. Следовательно,

$$\langle p_m \rangle = g\mu_B j B_j(\alpha), \quad \alpha = \frac{j\Gamma\mu_B B}{kT},$$

где B_j – **функция Бриллюэна** (обобщенная функция Ланжевена), которая переходит в функцию Ланжевена при $j \rightarrow \infty$. Тогда

$$J = Ng\mu_B j B_j(\alpha).$$

Парамагнетизм обнаруживают атомы с неспаренными спинами (т.е. атомы с нечетным количеством электронов). Если электронные оболочки атома полностью заполнены, его собственный магнитный момент равен нулю, т.е. такое вещество будет проявлять диамагнетизм.

Гиromагнитные опыты Эйнштейна и де-Хааса, Барнета

Гиromагнитное отношение: $\Gamma = p_m/L$. Вследствие вращения вокруг ядра, электрон подобен волчку, т.е. возникают гиromагнитные явления: намагничивание проводника приводит к его вращению и наоборот.

Опыт Эйнштейна и де-Хааса

Если намагничивать стержень из магнетика, то магнитные моменты p_m электронов выстраиваются вдоль поля, а момент импульса L – против. Следовательно, суммарный механический момент электронов $\sum L \neq 0$. При этом из ЗСМИ $L_{\text{стержня}} + \sum L = 0$, \Rightarrow стержень приходит во вращение.

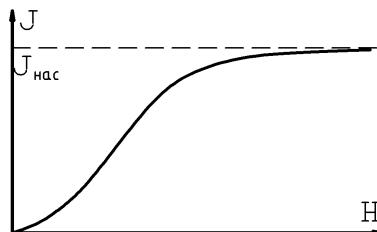
Эйнштейн и де-Хаас в своем опыте подвесили тонкий железный стержень на упругой нити, к нему прикрепили зеркальце для контроля угла поворота стержня и поместили стержень внутрь соленоида. Так как угол поворота стержня очень мал, для его обнаружения пользовались явлением резонанса: к соленоиду подводили переменный ток с частотой, равной частоте собственных колебаний стержня. В результате опыта получили, что гиromагнитное отношение $\Gamma = -e/m$, что в два раза больше теоретического.

Опыт Барнета

Барнет в своем опыте наоборот, быстро раскручивал стержень и измерял создаваемое им магнитное поле. Результаты опыта совпали с результатами Эйнштейна и де-Хааса.

В последствии результаты опытов были объяснены тем, что в них измерялось спиновое гиromагнитное отношение $p_{mS}/L_S = -e/m$.

Ферромагнетики. Гистерезис



У ферромагнетиков наблюдается сложная зависимость J от H (см. рис.). Кривая намагничения такого типа (т.е. при $J_0 = 0$) называется **основной (нулевой)**.

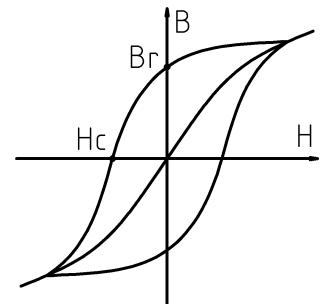
Гистерезис

При последовательном намагничивании и размагничивании ферромагнетиков наблюдается такое явление, как **гистерезис**: Даже при полном уменьшении напряженности МП ферромагнетик остается намагничен (**остаточная индукция** B_r). Для полного размагничивания ферромагнетика необходимо внести его в магнитное поле с противоположной направленной индукцией (**коэрцитивная сила** H_c).

Если H такова, что намагничение ферромагнетика достигает величины насыщения ($J = J_{\text{нас}}$), петля гистерезиса называется максимальной. Все другие петли называются частными циклами. Ферромагнетик с большим значением H_c называют жестким, с малым значением H_c – мягким.

Основы теории гистерезиса заложили Френкель и Хайсенберг. При определенных условиях в кристаллах возникают обменные силы, разворачивающие магнитные моменты электронов коллинеарно. Образуются области спонтанного намагничивания (**домены**). В пределах каждого домена ферромагнетик обладает определенной намагниченностью. Обычно домены ориентированы так, что взаимно компенсируют намагниченность, в результате чего общая намагниченность металла равна нулю.

Под действием МП домены разворачиваются вдоль поля. При этом значения намагничения меняются скачком — **эффект Баркгаузена**.



Магнитная анизотропия

Анализ кривых намагничивания показывает, что существуют т.н. **оси легкого и трудного намагничения**, из-за того, что существуют взаимодействия, ори-

ентирирующие в кристалле намагниченности вдоль определенного направления. К этому приводит перекрытие электронных орбит: спиновые моменты взаимодействуют с орбитальными, а те, в свою очередь, со всей кристаллической решеткой.

Ферромагнетизм как следствие обменных сил

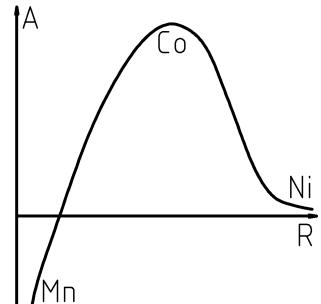
Энергия взаимодействия электронов складывается из **обменной энергии** и энергии кулоновского взаимодействия. Обменная энергия возникает из-за взаимодействия спинов электронов: $E_{\text{об}} = -A\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_r$, где σ – единичный спиновый вектор, A – **обменный интеграл**.

При $A > 0$ минимальной энергии соответствует одинаковое направление спинов, при $A < 0$ спины должны быть направлены противоположно. Для всего ТТ $E_{\text{об}} = -\sum A_{ij}\vec{S}_i\vec{S}_j$, где S – результирующие спины атомов.

Величина обменного интеграла зависит от межатомного расстояния.

В пространственном случае двухэлектронной системы $A = \frac{1}{2}(E_S - E_T)$, где E_S – энергия синглетного состояния ($S = 0$), E_T – энергия триплетного состояния ($S = 1$). При $A > 0 E_T < E_S$ и основным состоянием будет триплетное, спины атомов направлены противоположно (ферромагнетизм). При $A < 0 E_S < E_T$ – **антиферромагнетизм** или **ферримагнетизм**.

Антиферромагнетизм наблюдается при противоположном направлении спинов атомов, когда их величины полностью совпадают ($J = 0$). Ферримагнетизму называют антиферромагнетизм с неполной компенсацией спиновых моментов.



Температурная зависимость намагничения. Точка Кюри

Закон Кюри–Вейсса: *магнитная восприимчивость ферромагнетиков зависит от температуры по закону: $\chi = C(T - T_K)^{-1}$* . Температура T_K называется **температурой (точкой) Кюри**.

При $T = T_K$ ферромагнетик превращается в парамагнетик. При этой температуре за счет теплового движения области спонтанного намагничивания разрушаются, и у вещества остаются лишь парамагнитные свойства. При охлаждении ниже точки Кюри вновь возникает доменная структура и вещество опять становится ферромагнетиком.

Для антиферромагнетиков существует особая температура T_N – **температура (точка) Нееля**, при которой исчезает антиколлинеарность спинов. У некоторых антиферромагнетиков существует две точки Нееля: ниже меньшей

(T_{Nmin}) они являются ферримагнетиками, от T_{Nmin} до T_{Nmax} – антиферромагнетиками, выше T_{Nmax} – парамагнетиками.

С повышением температуры энергия ферромагнетика возрастает за счет «переворачивания» спина атома. Обменные взаимодействия приводят к обратному «переворачиванию» спина, но при этом «переворачивается» спин соседнего атома. Возникают **спиновые волны** (теория Блоха). **Магноном** называют квант энергии спиновой волны. Магнонный газ подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна. Число магнонов растет пропорционально $T^{3/2}$. **Закон Блоха**:

$$J(T) = J_{\text{нас}} \left(1 - \beta \left(\frac{T}{\theta}\right)^{3/2}\right),$$

где $J_{\text{нас}}$ – намагничение насыщения; θ – некоторая температура ($T \ll \theta$); $\beta \approx 1$ – коэффициент.

40 Явление электромагнитной индукции

Закон Фарадея. Правило Ленца

Закон электромагнитной индукции (ЭМИ): $\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$. Знак «–» в этом законе — согласно **правила Ленца**: *индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать вызывающей его причине*. Приведенную форму закона ЭМИ называют формой Максвелла (дифференциальная форма закона Фарадея).

Закон Фарадея: величина заряда, прошедшего по цепи, пропорциональна полному числу линий магнитной индукции, пересекаемых проводником, и обратно пропорциональна сопротивлению цепи: $\boxed{q = \frac{\Phi}{R}}$. Действительно, $q = \int_0^t I dt = \int_0^t \mathcal{E}/R dt = -1/R \int_{\Phi}^0 d\Phi = \Phi/R$. Из закона Фарадея следует определение величин магнитного потока (вебер, Вб) и магнитной индукции (tesla, Тл).

Формулировка Максвелла закона ЭМИ: ЭДС индукции равна скорости пересечения проводником линий магнитной индукции.

Токи Фуко

Индукционные токи могут возбуждаться не только в замкнутых проводниках, но и в массивных незамкнутых. Их называют **токами Фуко**. Так как вихре-

вые токи Фуко противятся внешней причине, движущиеся внутри МП массивные проводники затормаживаются (на этом эффекте основано демпфирование стрелок измерительных приборов), а также нагреваются в переменных ЭМП (индукционные печи).

Токи Фуко являются также причиной скин-эффекта.

Явление само- и взаимоиндукции

Самоиндукция — возникновение ЭДС индукции в электрической цепи вследствие изменения тока, протекающего в ней. Аналогично закону ЭМИ, ЭДС самоиндукции равна $\mathcal{E}_{Si} = -\frac{d\Psi}{dT}$, где Ψ — **потокосцепление** самоиндукции (поток через все витки рассредоточенной катушки).

При самоиндукции $I \propto \Psi$, $\Rightarrow I = LI$, где L — **индуктивность** контура. В центре длинного соленоида $L = MM_0n^2V$, где n — количество витков проводника на единицу длины соленоида, V — объем внутри соленоида. $\mathcal{E}_{Si} = -L \frac{dI}{dt}$.

Взаимоиндукция — возбуждение ЭДС индукции в одной цепи при изменении тока, протекающего по другой, или же изменении их взаимного расположения.

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}, \quad \Psi_{12} = M_{12}I_2, \quad \Psi_{21} = M_{21}I_1.$$

Ψ_{ik} называют **потокосцеплением** взаимной индукции i -й и k -й цепей, M_{ik} — взаимной индуктивностью.

Если контуры находятся в неферромагнитной среде, то $M_{12} = M_{21}$.

Магнитная энергия контура с током

ЭДС является работой по перемещению единичного положительного заряда, следовательно, работа по преодолению ЭДС самоиндукции равна $A = \int_0^t \mathcal{E}_{Si} I dt = \Psi I / 2 = LI^2 / 2$, \Rightarrow по ЗСЭ, $W = \frac{LI^2}{2}$. Для соленоида $L = \mu\mu_0 n^2 V$, $H = nI \Rightarrow$

$$W = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V = \frac{1}{2} HBV, \quad w = \frac{1}{2} HB.$$

Суммарная энергия нескольких контуров $W = \sum \Psi_i I_i / 2$, $\Psi_i = \Psi_{Si_i} + \sum_{j \neq i} \Psi_{ij}$. Таким образом, энергия складывается из собственной энергии токов W_0 и энергии взаимодействия токов $W_{\text{вз}}$:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} M_{ij} I_i I_j = W_0 + W_{\text{вз}}.$$

Если обозначить $L_i = M_{ii}$, получим:

$$W = \frac{1}{2} \sum \sum M_{ij} I_i I_j.$$

Энергия МП — не что иное, как собственная энергия тока в цепи. Таким образом, энергия МП в веществе:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{V_{\text{поля}}} BH dV = \frac{\mu\mu_0}{2} \int_V H^2 dV = \frac{1}{2\mu\mu_0} \int_V B^2 dV. \\ w &= \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \end{aligned}$$

41 Электромагнитные колебания в контуре

Квазистационарные поля. Критерии квазистационарности

Квазистационарными называют поля, изменяющиеся со временем достаточно медленно.

Первый критерий квазистационарности

Изменение ЭМП столь медленное, что внутри проводящих сред можно пренебречь током смещения $\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ по сравнению с током проводимости: $j_{\text{см max}} \ll j_{\text{max}}$.

Если ЭМП меняется с частотой ω , ток смещения $j_{\text{см}} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_0 \exp(i\omega t)$, $j = \gamma E = \gamma E_0 \exp(i\omega t)$. $j_{\text{см}}/j = \omega\varepsilon\varepsilon_0/\gamma \ll 1$, \Rightarrow первый критерий квазистационарности: $\boxed{\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon\varepsilon_0}}$, где γ — удельная проводимость.

В металлах $\varepsilon \approx 1$, $\Rightarrow \omega \ll \gamma/\varepsilon_0$, что выполняется для частот до $\sim 10^{18}$ Гц (ультрафиолет).

Если учесть инерционные свойства среды, предельная частота несколько уменьшится.

Второй критерий квазистационарности

Можно пренебречь запаздыванием ЭМВ ($c \ll \infty$):

$$E(x, t) = E_0 e^{i\omega(t-x/c)} = E_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega x/c}; \quad e^{-i\omega x/c} = 1 - i\omega \frac{x}{c} + \dots$$

Эффектом запаздывания можно пренебречь, если $\omega x/c \ll 1$; т.к. $\omega/c = 2\pi/\lambda$, получим: $x \ll \lambda$. Таким образом, линейные размеры области должны быть значительно меньше длины волны. Для промышленного переменного тока $\lambda \sim 10^7$ м, т.е. эффектами запаздывания можно пренебречь для довольно значительных областей.

Следовательно, к квазистационарным полям относится большинство полей электротехники и многие поля радиотехники.

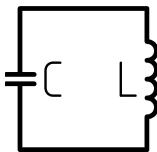
Т.к. мы пренебрегли током смещения, уравнения Максвелла примут вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad \vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

Переходные процессы в RC и LC цепях. Колебательный контур

Цепь LC — колебательный контур

Замкнем колебательный контур с заряженным конденсатором. ЭП конденсатора начнет уменьшаться. Ток, протекающий по катушке, вызовет в ней МП. Через четверть периода колебаний конденсатор полностью разрядится, а МП в катушке достигнет максимума. Далее поле в катушке начинает уменьшаться, возбуждая экстраток самоиндукции, который направлен так, чтобы поддержать разряд конденсатора (правило Ленца). Конденсатор начинает заряжаться, причем направление ЭП в нем теперь противоположно первоначальному. Через половину периода после начала колебаний конденсатор полностью заряжен, МП в катушке отсутствует. Далее начинается процесс разрядки конденсатора. В контуре устанавливаются гармонические колебания ЭП в конденсаторе и МП в катушке.



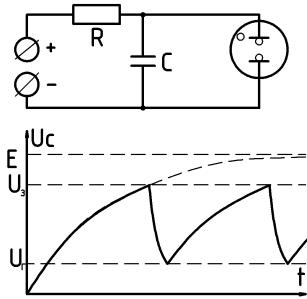
Применим к контуру второе правило Кирхгофа: $\sum U = \sum \mathcal{E}$, $U_C = -L \frac{dI}{dt}$. $I = \frac{dq}{dt}$, $U_C = \frac{q}{C}$, $\Rightarrow L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$. Получим **уравнение гармонических незатухающих колебаний**:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \quad q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$I = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad U_c = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad I_0 = q_0 \omega_0, \quad U_0 = q_0 / C.$$

Таким образом, между колебаниями тока и напряжения существует сдвиг фаз, ток отстает от напряжения по фазе на $\Delta\varphi = \pi/2$.

Цепь RC



Рассмотрим RC контур с неоновой лампой. В отсутствии лампы конденсатор заряжается по закону $U = \mathcal{E}[1 - \exp(-\frac{t}{RC})]$. Однако, если в контур включить неоновую лампу, играющую роль разрядника, при достижении напряжения зажигания лампы U_3 , она вспыхивает, что приводит к разряду конденсатора до напряжения гашения лампы U_Γ .

Если пренебречь временем разряда конденсатора, получим для периода **релаксационных колебаний** в контуре RC:

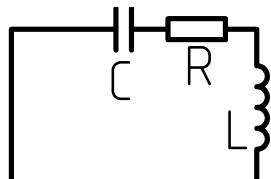
$$T = T_3 + T_\Gamma = RC \ln \frac{\mathcal{E} - U_\Gamma}{\mathcal{E} - U_3}, \quad T \approx \frac{U_3 - U_\Gamma}{\mathcal{E}} RC.$$

Энергия, запасенная в контуре

Энергия контура складывается из энергии ЭП и МП: $E = E_C + E_L$, $E_C = U^2 C / 2$, $E_L = I^2 L / 2$, $\Rightarrow E_C = U_0^2 C / 2 \cdot \cos^2 \omega_0 t$, $E_L = I_0^2 L / 2 \cdot \sin^2 \omega_0 t$. $\langle E_C \rangle = U_0^2 C / 4$, $\langle E_L \rangle = I_0^2 L / 4$. $I_0 = q_0 \omega_0 = U_0 C \omega_0$, $I_0^2 = U_0^2 C / L$, $\Rightarrow \langle E_C \rangle = \langle E_L \rangle$,

$$E = U_0^2 C / 2 = I_0^2 L / 2.$$

Затухающие колебания в контуре и их уравнение



В реальном контуре происходят потери тока на внутреннем сопротивлении элементов, т.е. в цепь идеального контура необходимо ввести дополнительный элемент — сопротивление R.

Применяя к этому контуру второе правило Кирхгофа, получим: $IR + U_C = -L \frac{dI}{dt}$, $L \ddot{q} + R \dot{q} + q/C = 0$. Пусть $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $2\beta = R/L$, тогда:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решая данное уравнение, получим (при $\beta < \omega_0$):

$$q = \exp(-\beta t) [A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t)],$$

$$q = q_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi), \text{ где } \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2.$$

$$U = U_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi);$$

$$I = I_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi + \psi), \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Время релаксации

Первый критерий квазистационарности можно переписать так: $\omega \varepsilon \varepsilon_0 \ll \gamma$; $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, $\Rightarrow 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \ll T\gamma$ или $\varepsilon\varepsilon_0 \ll T\gamma$, $\varepsilon\varepsilon_0/\gamma \ll T$. Время $\tau_m = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\gamma}$ называют **временем релаксации Максвелла**. Таким образом, критерий квазистационарности примет вид $\tau_m \ll T$.

Физический смысл времени релаксации — это время, за которое заряд уменьшается в e раз. Для реального контура время релаксации $\tau_m = 1/\beta$, где β — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания. Добротность

Рассмотрим два соседних колебания $q_n(t)$ и $q_{n+1}(t+T)$; $q_n/q_{n+1} = \exp(\beta t)$. **Логарифмическим декрементом затухания** называют величину $\delta = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} = \beta T$.

Т.к. $\tau = 1/\beta$, то $\delta = T/\tau = 1/N$: логарифмический декремент затухания есть обратное число колебаний, совершающихся в контуре за время релаксации (т.е. за время, когда амплитуда колебаний уменьшается в e раз).

Добротность контура — это помноженное на π число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз: $Q = \pi/\delta = \pi\tau/T = \pi N$.

Вынужденные колебания. Ширина резонансной кривой

Пусть внешняя ЭДС изменяется по гармоническому закону: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$. Тогда $IR + U_C = -L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}(t)$, \Rightarrow

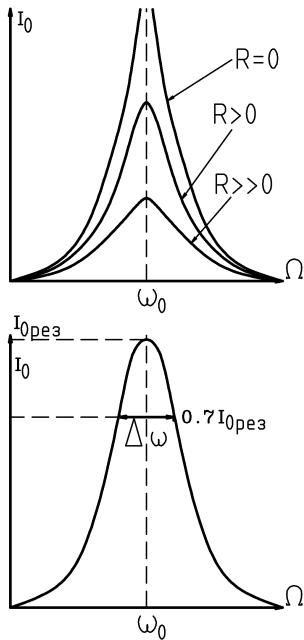
$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \Omega t.$$

При $\beta^2 \ll \omega_0^2$ частота установившихся колебаний будет равна частоте внешней ЭДС:

$$q = q_0 \cos(\Omega t - \psi), \quad q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}.$$

$$U_C = U_0 \cos(\Omega t - \psi), \quad I_L = I_0 \sin(\Omega t - \psi).$$

Видно, что при $\Omega = \omega_0$ амплитуды резко возрастают, а фаза ψ испытывает скачок: наблюдается **резонанс**.



Добротность контура определяет остроту резонансных кривых. Рассмотрим отношение $I_0/I_{0\text{рез}} = 0.7$ ($0.7^2 \approx 0.5$, что соответствует половине резонансной мощности). Тогда ширина резонансной кривой на этом уровне $\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$.

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})^2}} = \Omega q_0 = \frac{\mathcal{E}_0 \Omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}.$$

$$I_{0\text{рез}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2\beta L} = \frac{\mathcal{E}_0 T Q}{2\pi L}.$$

Процесс установления вынужденных колебаний. Нормальные колебания

Вынужденные колебания устанавливаются по прошествии некоторого времени после включения вынуждающей ЭДС. При замыкании цепи кроме вынужденных колебаний появляются еще и собственные затухающие колебания

$$q_C = q_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \psi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

С течением времени $\exp(-\beta t) \rightarrow 0$, и остаются только вынужденные колебания.

Время установления вынужденных колебаний зависит от времени релаксации: чем оно больше, тем дольше будут устанавливаться колебания. Амплитуда колебаний медленно возрастает, частота колебаний в контуре постепенно приближается к частоте вынуждающей ЭДС.

В связанных контурах колебания аналогичны вынужденным, но здесь роль вынуждающей ЭДС играет ЭДС взаимоиндукции $\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}$. Индукционные токи, возникающие под воздействием \mathcal{E}_{12} во втором контуре, создают в первом контуре ЭДС взаимоиндукции, уменьшающую амплитуды колебания тока и напряжения. Во втором контуре устанавливаются колебания с частотой вынуждающей ЭДС. Если $\Omega = \omega_0$ наблюдается резонанс.

Нормальные колебания — гармонические собственные колебания, которые могли бы существовать в линейных системах при отсутствии в них потерь энергии. В каждом нормальном колебании все точки колеблются с одной и той же частотой. Число нормальных колебаний оказывается равным числу СС контура.

42 Механизмы электропроводности твердого тела

Проводники. Основные положения классической теории Друде–Лоренца

Проводники — тела, в которых могут двигаться заряды, создавая электрический ток. Высокая проводимость металлов обусловлена существованием свободных электронов проводимости.

В классической **теории Друде–Лоренца** электроны в металлах рассматриваются как электронный газ. Плотность электронного газа 1-валентного металла $n_0 = \rho N_A / A$, где A — атомная масса металла, ρ — его плотность. Средняя кинетическая энергия электронов $\langle E_k \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$.

Ток возникает под действием внешнего электрического поля, вызывающего упорядоченное движение электронов. Плотность тока $\vec{j} = -n_0e\langle \vec{v} \rangle$, где $\langle \vec{v} \rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения электронов. $\langle v \rangle \approx \frac{1}{2}v_{max}$ (при

равноускоренном движении), $\Rightarrow \langle v \rangle = \frac{eE\tau}{2m} = bE$, где $b = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\tau$ — **подвижность электронов**, τ — время свободного пробега. τ различно для разных электронов, поэтому $b = \frac{e}{m}\langle \tau \rangle$.

Законы Ома и Джоуля–Ленца в классической теории

В классической теории $j = \frac{n_0e^2}{2m}E$. Введем коэффициент $\lambda = \frac{1}{2}\frac{ne^2}{m}\langle \tau \rangle$ —

электропроводимость металла, тогда получим **закон Ома**: $j = \lambda E$. Таким образом, сопротивление проводников обусловлено столкновениями электронов проводимости с кристаллической решеткой.

К концу пробега электрона $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2\langle \tau \rangle^2 E^2}{m}$. Согласно предположению Друде, эта энергия переходит в энергию кристаллической решетки (тепловая энергия). За секунду каждый электрон испытывает в среднем $1/\langle \tau \rangle$ соударений, при которых сообщается энергия кристаллической решетке. Тогда в единице объема за секунду выделяется $Q_1 = \frac{1}{2}\frac{n_0e^2\langle \tau \rangle}{m}E^2$ тепла. Тогда получим **закон Джоуля–Ленца**: $Q_1 = \lambda E^2$.

Зонная теория твердого тела. Принцип Паули. Статистика Ферми–Дирака

Согласно квантовой теории ТТ, движение электронов в ТТ определяется **уравнением Шрёдингера** $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = E\Psi$, где Ψ – **волновая функция** электрона, E – его энергия. Решения уравнения дают дискретные значения энергии электрона, т.е. в металлах энергия электрона квантуется. Уровни энергии свободных электронов являются вырожденными.

Принцип Паули: *в одном и том же энергетическом состоянии не может быть более одного фермиона с заданной комбинацией квантовых чисел s, l, n, m .* При $T = 0$ все энергетические состояния с энергиями меньше некоторого значения E_F вследствие запрета Паули заняты. Энергия $E_F = \max(E)|_{T=0}$ называется **уровнем Ферми**. Состояния с $E > E_F$ при абсолютном нуле оказываются вакантными.

Т.к. электроны – фермионы, они подчиняются **статистике Ферми–Дирака**:

$$f(E) = \left(\exp \frac{E - E_F}{kT} + 1 \right)^{-1}.$$

Независимо от температуры $f(E_F) = 1/2$, т.е. уровень Ферми можно еще определить как энергию электронов с функцией распределения $f = 1/2$. Уровень энергии Ферми металлов очень высок, поэтому при всех разумных температурах электронный газ металлов вырожден.

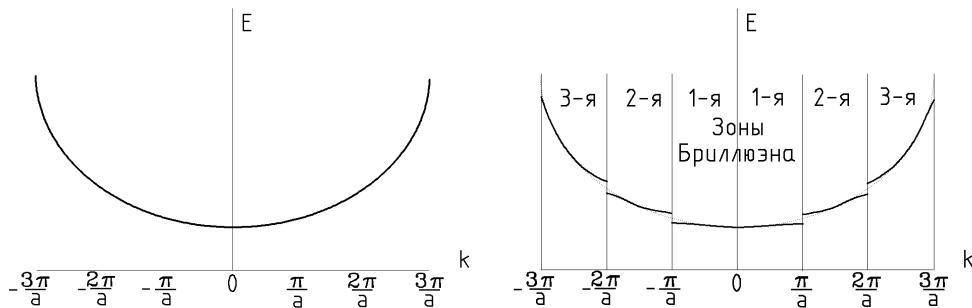
Т.к. на валентные электроны влияет периодическое электрическое поле решетки, спектр значений энергии электронов разбивается на ряд разрешенных и запрещенных зон (**зонная структура**).

Рассмотрим процесс объединения N атомов в кристалл. Запрет Паули приводит к тому, что электроны занимают N близко расположенных энергетических уровней, образующих **зону**. Сильнее всего расщепляются внешние энергетические уровни, в то время как внутренние практически не расщепляются.

Решение уШ для электрона в кристалле получено Блохом: $\Psi = U_k(r) e^{ikr}$ – **функция Блоха**. $U_k(r)$ – периодическая функция распределения потенциальной энергии с периодом, равным периоду кристаллической решетки, $k = p/\hbar$ – **волновой вектор** электрона.

Область k пространства, внутри которой энергия электрона в кристалле изменяется квазинепрерывно, называется **зоной Бриллюэна**.

Существование энергетических зон помогает объединить свойства проводников, полупроводников и диэлектриков.



Распределение энергии свободных электронов и электронов в кристалле

Зонная структура проводников

В металлах верхние энергетические уровни валентной зоны связаны, следовательно, она является зоной проводимости. Высокая проводимость металлов объясняется тем, что электрону нет необходимости преодолевать энергетический барьер между зоной проводимости и валентной зоной, достаточно лишь «перескочить» на свободный валентный уровень.

Зонная структура полупроводников

В полупроводниках валентная зона полностью заполнена, для возникновения проводимости электронам необходимо преодолеть запретную зону, которая у полупроводников не очень велика ($\sim 1 \text{ эВ}$). Если энергии теплового движения достаточно для преодоления запрещенной зоны, такое вещество называют собственным полупроводником.

Т.к. при уменьшении температуры максимальная энергия электронов падает до уровня Ферми, проводимость полупроводников при уменьшении температуры падает (в отличие от проводников).

Зонная структура диэлектриков

В диэлектриках валентная зона, как и в полупроводниках, полностью заполнена. Однако, ширина их запретной зоны значительно больше ($\sim 5 \div 10 \text{ эВ}$). Это приводит к тому, что очень малое количество электронов диэлектрика способно покинуть валентную зону, чем и объясняется их низкая проводимость.

Собственная и примесная проводимость полупроводников

У полупроводников в валентной зоне находится 4 электрона. При повышении температуры происходит разрыв некоторых валентных связей и образуется пара электрон–дырка. Т.о., **собственная проводимость** обусловлена

переносом зарядов электронами и дырками и является совокупной электронно-дырочной проводимостью.

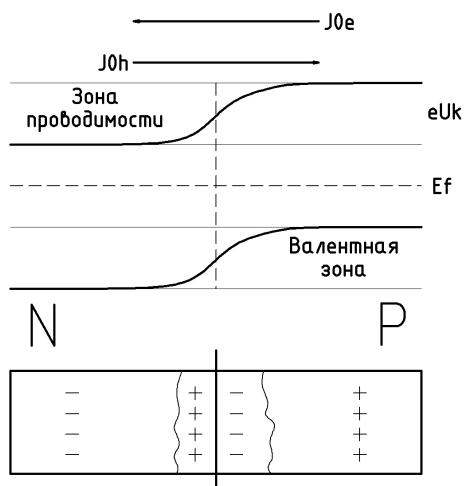
Для увеличения проводимости в полупроводники добавляют примеси: трехвалентные (**акцепторные**) и пятивалентные (**донарные**).

Акцепторы, замещая атом полупроводника, приводят к появлению в нем дополнительных дырок. Доноры же выполняют вклад в увеличение числа свободных электронов. Если в полупроводнике количество электронов превышает количество дырок, в нем возникает *электронная проводимость* (п-типа), иначе — *дырочная проводимость* (р-типа).

Проводимость примесного полупроводника зависит от температуры: при ее повышении вклад примеси резко падает и проводимость становится собственной.

Примесь создает в энергетическом барьере полупроводника дополнительный уровень (уровень Ферми): донорная — ближе к зоне проводимости, акцепторная — ближе к валентной зоне. Благодаря этому становится легче проникновение электронов в зону проводимости у доноров и переход электронов в валентную зону у акцепторов.

P–N переход. Контактные явления



В случае контакта полупроводников р- и п-типа, в области контакта их уровни Ферми выравниваются, т.к. они обмениваются свободными носителями, следовательно, энергетические зоны искривляются, образуя **контактную разность потенциалов** и потенциальный барьер $\varphi = eU$.

В области контакта образуется двойной слой объемных зарядов, создающих поле, направленное противоположно первоначальному, и препятствующее дальнейшему передвижению носителей через **р-п переход**. При этом существуют слабые

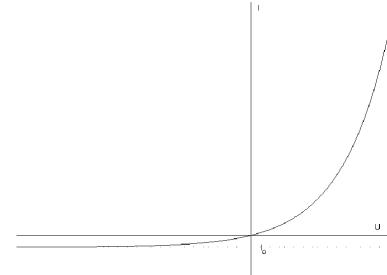
токи: **дифференциальный ток** I_d основных носителей заряда (хвост распределения Максвелла) и **дрейфовый ток** I_0 неосновных носителей заряда, для которых потенциальный барьер р-п перехода оказывается открытым. В равновесном состоянии $I_0 = I_d$, т.е. суммарный ток через р-п переход равен нулю.

Если приложить к р-п переходу внешнее напряжение, оно раздвигает уровни Ферми. Если источник включен прямо («+» к р-области), то $\varphi = e(U - U_{\text{прям}})$, т.е. высота барьера падает (в р-области E_F уменьшается, в п-области — увеличивается). Следовательно, при этом проводимость р-п перехода возрастает. Если же приложить обратное напряжение, $\varphi = e(U + U_{\text{обр}})$, и проводимость падает за-

счет того, что величина дифференциального тока уменьшается, а дрейфовый ток остается. Величина обратного тока, протекающего через полупроводник, определяется величиной дрейфового тока: $I = I_{\text{д}} - I_0 \rightarrow I_0$, т.к. $I_{\text{д}} \rightarrow 0$.

Концентрация основных носителей подчиняется распределению Больцмана: $n = n_0 \exp(-\frac{\varphi - eU}{kT})$ (если приложено обратное напряжение, $U = -U_{\text{обр}}$). Тогда для вольт-амперной характеристики р-п перехода получим:

$$I = I_0 \left(\exp \frac{eU}{kT} - 1 \right).$$



При прямом подключении р-п перехода $I \rightarrow I_0 \exp \frac{eU}{kT}$, при обратном же $I \rightarrow -I_0$, т.е. *р-п переход обладает выпрямительными свойствами (полупроводниковый диод)*.

Существование объемных зарядов приводит к появлению **барьерной емкости** $C_{\text{бар}} = \epsilon \epsilon_0 S / x$, где S – площадь р-п перехода, x – его толщина. При увеличении обратного напряжения ширина р-п перехода уменьшается, что приводит к увеличению емкости. На этом свойстве р-п перехода основано действие **варикапов**.

Кроме того, существует **диффузионная емкость** $C_{\text{диф}} = \Delta Q / \Delta U$ при прямом подключении диода: инжектируемые электроны и дырки вносят в области р и п избыточный заряд, который исчезает за счет рекомбинации с основными носителями. Т.к. время рекомбинации $\tau_{\text{рек}} \neq 0$, то эти заряды существуют в течение некоторого времени в припереходной зоне. Из-за того, что эта зона очень тонкая, а накопленный заряд достаточно большой, диффузионная емкость велика.

43 Основы квантовой теории твердого тела

Модели твердого тела. Квазичастицы

В **адиабатном приближении** ядра атомов считаются неподвижными, вокруг них двигаются электроны. Основная задача — определение энергетических состояний электронов. Адиабатное приближение используется лишь для расчета этих состояний.

Одним из основных результатов квантового подхода к исследованию свойств ТТ явилась концепция **квазичастиц**. Энергию возбужденного состояния кристалла можно представить как сумму энергий квазичастиц. Это позволяет ввести понятие газа квазичастиц и использовать представления кинетической теории газов.

Атомы ТТ при любой температуре совершают колебания около положения равновесия. Эти колебания вызывают звуковые волны в кристаллической решетке. Эти звуковые волны удобно описывать при помощи квазичастиц — **фононов** — квантов звуковых колебаний. Фононы являются бозонами.

В ТТ могут существовать как оптические, так и акустические фононы. При абсолютном нуле температуры возбуждаются только акустические фононы. ТТ можно рассматривать как емкость, внутри которой заключен фононный газ. Фононы могут рождаться и исчезать в результате взаимодействия. Число фононов непостоянно и возрастает с ростом температуры.

При поглощении атомом света возможно образование водородоподобной пары электрон–дырка, которую называют **экситоном**. Энергия экситона меньше ширины запрещенной зоны, иначе электрон покинет атом. Экситоны легко возникают в диэлектриках (там велико притяжение между электронами и дырками). В полупроводниках энергия экситонов значительно ниже. В металлах же вероятность экситонного поглощения излучения практически нулевая.

Электрон–фононный гамильтониан

Электрон–фононное взаимодействие — взаимодействие между двумя подсистемами квазичастиц в ТТ, а именно: носителями заряда (блоховскими электронами или дырками) и тепловыми колебаниями кристаллической решетки (фононами). Конкретный вид электрон–фононного гамильтониана зависит от структуры кристалла, числа носителей заряда, характера зонного спектра и особенностей колебания кристаллической решетки.

Модель Блоха

Квантовомеханическая теория Блоха движения электрона в идеальной «замороженной» кристаллической решетке сводит сложную многоэлектронную проблему к задаче о движении отдельного электрона в строго периодическом потенциале, создаваемом узлами кристаллической решетки. Волновая функция Блоха представляет собой модулированную с периодом идеальной решетки плоскую волну: $\psi_{nk}(\vec{x}) = u_{nk}(\vec{x}) \exp(-i\vec{k}\vec{x})$, где n — дискретный номер энергетической зоны, \vec{k} — квазиволновой вектор, определенный с точностью до вектора обратной решетки \vec{K} . Если кристалл имеет ограниченные размеры, векторы \vec{k} будут квазидискретными.

Поведение электронов или дырок в кристалле имеет особенно простой вид на краю изотропных зон, когда возможно использование т.н. приближения эффективной массы: $E_n(\vec{k}) \simeq E_n(0) + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$, величина $\hbar \vec{k}$ является квазимпульсом и законы ее сохранения выполняются лишь с точностью до $\hbar \vec{K}$.

Т.о., в строго периодическом поле кристалла электроны и дырки ведут себя как свободные заряженные частицы с эффективной массой m .

Методы описания колебаний кристаллической решетки основаны на разложении в ряд Тейлора потенциальной энергии решетки по степеням малых смещений \vec{u}_{nj} ионов из их положения равновесия: $\vec{R}_{nj} = \vec{R}_{nj}^0 + \vec{u}_{nj}$. Здесь $\vec{n} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$ — вектор, определяющий положение элементарной ячейки в кристалле. Предполагается, что в кристалле N таких ячеек, в каждой расположено v ионов, положение которых определяется векторами \vec{j} .

Простейшее приближение является квадратичным, оно диагонализируется в нормальных координатах, что позволяет определить $3v$ ветвей частот $\omega_\alpha(\vec{k})$ и ортов, определяющих направление нормальных колебаний. В гармоническом приближении имеем дело с $3vN$ независимыми гармоническими осцилляторами с энергией

$$H = U_0 + \sum_{\alpha\vec{k}} \hbar\omega_\alpha(\vec{k})(a_{\alpha\vec{k}}^+ a_{\alpha\vec{k}} + 1/2),$$

где α нумерует $3v$ ветвей спектра колебаний решетки, $\hbar\omega_\alpha(\vec{k})$ — энергия фонона, $a_{\alpha\vec{k}}^+$ и $a_{\alpha\vec{k}}$ — амплитуды рождения и уничтожения фононов.

Гармоническое приближение не учитывает теплового расширения кристалла, т.к. среднее смещение ионов в нем равно нулю.

Блоховское взаимодействие — простейший вид электрон–фононного взаимодействия в металлах, согласно которому решетка металла рассматривается как статическое пространственно–периодическое поле $V(\vec{x}) = V(\vec{x} + n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c})$, а все электроны движутся независимо, подчиняясь уравнению Шрёдингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_k(\vec{x}) + V(\vec{x})\psi_k(\vec{x}) = E_k\psi_k(\vec{x}),$$

где $\psi_k(\vec{x})$ и E_k — собственное состояние и соответствующая собственная энергия электрона. Согласно Блоху, действующий на электрон потенциал в линейном по смещению ионов приближении равен

$$V_1(\vec{x}) \approx -\vec{u}(\vec{x})\nabla V(\vec{x}).$$

Метод потенциала деформации Бардина–Шокли

Электрон–фононное взаимодействие в ковалентном полупроводнике можно найти, если считать концентрацию носителей заряда малой и пренебречь их взаимодействием между собой. Если в таком кристалле возникает небольшая статическая деформация, описываемая вектором смещения $\vec{u}(\vec{x})$, то соответ-

ствующий тензор деформации имеет компоненты: $u_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \right)$, зависящие от координаты \vec{x} элемента объема.

Обозначим $E_0(\vec{k})$ зонную энергию электрона до деформации среды. В присутствии пространственно-неоднородной деформации энергия электрона приобретает плавную зависимость от \vec{x} :

$$E(\vec{k}, \vec{x}) = E_0(\vec{k}) + \mathfrak{C} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}),$$

при условии, что E_0 имеет сферически-симметричный вид. Величина $\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x})$ описывает относительное изменение объема системы, возникающее только при деформациях, обусловленных акустическими фононами.

Гамильтониан электрон–фононного взаимодействия примет вид:

$$H_{e-ph} = \int \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{+}(\vec{x}) \psi_{\sigma}(\vec{x}) \mathfrak{C} \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}) dx,$$

где σ – спиновые индексы, $\psi_{\sigma}^{+}(\vec{x})$ и $\psi_{\sigma}(\vec{x})$ – электронные операторы рождения и уничтожения соответственно. Разложив гамильтониан по блоховским функциям с учетом того, что вклад в него дает лишь продольная фононная мода, получим:

$$H_{e-ph} = \sum_{\vec{k}' \vec{q}} \sum_{\sigma} A_q \mathfrak{C}_{\vec{k}' \sigma}^{+} \mathfrak{C}_{\vec{k} \sigma} (a_{\vec{q}} - a_{\vec{q}}^{+}), \quad A_{-\vec{q}}^{+} = -A_{\vec{q}}.$$

Квазиволновые векторы электронов и фононов связаны между собой законами сохранения $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$ для нормальных процессов рассеяния и $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q} + \vec{K}$ для процессов переброса Пайерлса (в которых участвуют векторы обратной решетки).

Электрон–фононный гамильтониан описывает процессы рассеяния, при которых происходит уничтожение электрона и фонона с квазимпульсами $\hbar \vec{k}$ и $\hbar \vec{q}$ соответственно и рождается электрон с квазимпульсом $\hbar \vec{k}'$. Второй член гамильтониана описывает уничтожение электрона с квазимпульсом $\hbar \vec{k}$ и рождения электрон–фононной пары с квазимпульсами $\hbar \vec{k}'$ и $-\hbar \vec{q}$ соответственно. Таким образом, реальной частицей является не свободный блоховский носитель заряда, а носитель, окруженный облаком продольных акустических фононов. Эта квазичастица называется **поляроном**.

Поляронная проводимость характерна для диэлектриков и ионных решеток. Поляроны делятся на два вида: ПБР (поляроны большого радиуса) характеризуются слабым взаимодействием с электронами, у ПМР (поляроны малого радиуса) такое взаимодействие значительно сильнее. ПМР перемещаются в кристалле за счет тепловых флюктуаций скачкообразно.

Процессы столкновения квазичастиц также характеризуются законом сохранения энергии: $E(\vec{k}) - E(\vec{k}') \pm \hbar\omega_{\vec{q}} = 0$.

Модель Бардина–Пайнса

Простая модель Блоха для электрон–фононного взаимодействия в металле нуждается в уточнении ввиду значительной концентрации электронов проводимости и межэлектронного взаимодействия. Помимо экранирования кулоновского взаимодействия и замены закона $1/r$ на $\exp(-kr)/r$ существенно меняется величина матричных элементов электрон–фононного взаимодействия и характер закона дисперсии фононов.

Согласно **модели Бардина–Пайнса**, электроны проводимости двигаются в непрерывной положительно заряженной среде и взаимодействуют как между собой по закону Кулона, так и с продольными фононами. Гамильтониан такой системы состоит из гамильтониана свободных блоховских электронов H_e^0 , свободных фононов H_{ph}^0 и двух слагаемых взаимодействия: электрон–фононного H_{e-ph} и электрон–электронного H_{e-e} :

$$H = H_e^0 + H_{ph}^0 + H_{e-ph} + H_{e-e}.$$

Сверхпроводимость. Эффект Мейснера. Модель БКШ

Сверхпроводимость — явление, при котором наблюдается устойчивое к нарушениям решетки квантовое макроскопическое движение электронов. В нормальном состоянии этому движению препятствует колебание узлов кристаллической решетки, существенно увеличивающееся с ростом температуры.

Сверхпроводимость была обнаружена Камерлинг–ОНнесом. Оказалось, что сопротивление большинства чистых металлов (кроме благородных, щелочноzemельных и ферромагнитных) при снижении температуры плавно падает, и при достижении некоторой критической температуры T_C скачком обращается в нуль.

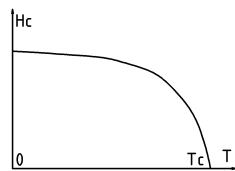
Сверхпроводники обладают следующими свойствами.

Эффект Мейснера–Оксенфельда (идеальный диамагнетизм) присущ всем сверхпроводникам. Действительно, т.к. $\vec{E} = \rho\vec{j}$, и т.к. $j < \infty$, $\rho = 0$, то $\vec{E} = 0$ и $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$, т.е. магнитная индукция внутри сверхпроводника постоянна и равна нулю (сверхпроводник вытесняет из себя МП).

Исчезновение МП связано с возникновением незатухающих поверхностных токов, которые создают внутри образца сверхпроводника МП, равное и против-

воположно направленное внешнему. МП проникает в сверхпроводник только в тонком приповерхностном слое, в котором и протекают экранирующие токи.

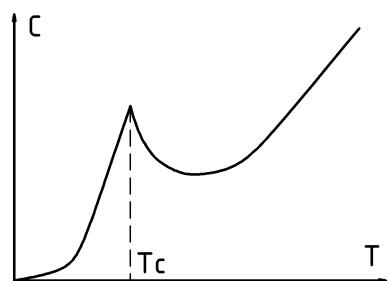
Из идеального диамагнетизма следует, что *ток не может протекать внутри сверхпроводника, а проходит только в тонком приповерхностном слое.*



Критическое МП. Если напряженность внешнего МП превосходит некоторое критическое значение H_C , то сверхпроводник переходит в обычное состояние. При критической температуре $H_C = 0$, при приближении к абсолютному нулю H_C имеет полученную экспериментально зависимость:

$$H_C(T) = H_{C0} \left(1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \right).$$

По отношению к МП сверхпроводники делят на два рода: в сверхпроводники первого рода МП не проникает вплоть до достижения внешним полем критической величины; у сверхпроводников второго рода существует два значения критического поля: H_{C1} и H_{C2} . При $H < H_{C1}$ МП не проникает в образец, при $H_{C1} < H < H_{C2}$ поле проникает в образец в виде тонких вихревых нитей (т.е. происходит чередование нормальных и сверхпроводящих областей), а при $H > H_{C2}$ образец теряет сверхпроводящие свойства. Смешанные состояния сверхпроводников второго рода называют **фазой Шубникова**.



Изотопный эффект. Критическая температура сверхпроводника зависит от массы изотопа: $T_C \sim m^{-1/2}$, где m – масса изотопа.

Скачек теплоемкости. У сверхпроводника теплоемкость зависит от температуры: $C = AT^3 + BT$, постоянная B описывает вклад электронов в теплоемкость. Т.о., при близких к абсолютному нулю температурах теплоемкость должна иметь прямую зависимость от температуры, однако, наблюдается скачек теплоемкости вверх при $T = T_C$, а затем экспоненциальный спад до нуля. Такое поведение сверхпроводников означает, что *переход вещества в сверхпроводящее состояние является фазовым переходом второго рода* и связан с коренными изменениями свойств электронов.

Теория БКШ

Согласно теории БКШ (Бардин, Купер и Шриффер) микроскопический механизм сверхпроводимости характеризуется притяжением электронов вблизи поверхности Ферми.

Под действием электронов решетка поляризуется (атомы смещаются к электронам), вследствие такого смещения, вызванного одним электроном, второй электрон также сместится. Можно говорить о межэлектронном притяжении, осуществляемом посредством узлов кристаллической решетки.

При таком взаимодействии электроны обмениваются фононами, для них имеет место закон сохранения энергии. Электроны рассеиваются друг на друге. Если притяжение двух электронов превосходит кулоновское отталкивание, образуется электронная пара. Фононы, которыми обмениваются электроны, являются виртуальными, связанными с поляризацией решетки и не существующими независимо от электронов. Пара взаимодействующих электронов называется **куперовской парой**.

Т.к. критическая температура зависит от изотопной массы, то важную роль в сверхпроводимости играет динамика ионов, расположенных в узлах решетки.

Согласно принципу запрета Паули, взаимодействовать могут не все электроны, а лишь те, чья энергия лежит в узкой полосе около уровня Ферми. За счет образования электронных пар суммарная энергия системы снижается.

Куперовские пары являются бозонами, т.к. взаимодействуют только электроны с противоположно направленными спинами. Т.о., происходит бозе-конденсация куперовских пар (все пары находятся в одинаковых состояниях).

44 Уравнения Максвелла

Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла как обобщение экспериментальных данных

ЭП и МП связаны, они могут превращаться друг в друга, изменение МП вызывает изменение ЭП и наоборот. Эти свойства ЭМП были открыты Максвеллом.

ЭМП характеризуется четырьмя уравнениями Максвелла (УМ).

1. **Теорема Гаусса:** $\oint \vec{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$
2. **Теорема Гаусса для МП:** $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i, I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$

Однако, МП создается не только током проводимости, но и током смещения

$$\vec{j}_{cm} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

3. Из второго закона ЭМИ, $\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$, \Rightarrow

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

4. $\text{div rot } \vec{E} = -\text{div } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\Rightarrow \text{div } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0$. Т.о., $\text{div } \vec{B} = \text{const}$, т.е. $\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$.

УМ связывают шесть величин — проекций векторов \vec{E} и \vec{B} . Заданными считаются ρ и \vec{j} .

Сила Лоренца. Ток смещения

Уравнение непрерывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$. Из первого УМ $\rho = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E}$, $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \text{div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

$$\text{div} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) = 0.$$

Следовательно, линии полного тока $\vec{j}_{\text{полн}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$ всегда замкнуты. Ток

$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ называется **током смещения**.

В ЭМП на проводники действует **сила Ампера** $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$, где l — длина проводника. Т.к. \vec{l} и \vec{v} коллинеарны, можно написать: $I\vec{l} = Nq\vec{v}$. Следовательно, на один электрон действует сила $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Если к действию МП добавляется ЭП, результирующая сила называется **силой Лоренца** и равна $\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$.

Вихревое электрическое поле

Т.к. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, то любое изменение МП вызывает вихревое ЭП. Это поле не является электростатическим, т.к. у последнего силовые линии всегда разомкнуты. Т.о., появляется ЭП, связанное с МП аналогично тому, как вокруг проводника с током появляется вихревое МП.

Взаимное превращение электрического и магнитного полей

Магнитное поле имеет релятивистскую природу. Связь МП и ЭП определяется уравнениями преобразования (штрихом отмечена движущаяся система):

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; & B_x &= X'_x; & E_y &= \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ B_y &= \frac{B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & E_z &= \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & B_z &= \frac{B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Т.о., если в движущейся системе существует ЭП, то в неподвижной будет наблюдаться еще и МП.

Уравнения Максвелла в интегральном виде

Проинтегрировав дифференциальные УМ, получим:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}; & \oint_l \vec{H} d\vec{l} &= \vec{j}_{\text{макро}} + \vec{j}_{\text{смеш}}; \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \sum q_i; & \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \end{aligned}$$

Волновое уравнение. ЭМВ в вакууме

Т.к. $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, можно ввести векторный потенциал $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad \text{T.к. } \operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \Rightarrow \\ \Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Введем калибровку по Лоренцу (положим равным нулю выражение при градиенте). Тогда получим совокупность **волновых уравнений (уравнений д'Аламбера)**:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}; \quad \Delta \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Они описывают движение электромагнитной волны в пространстве. Гармонические колебания ЭМВ описываются уравнениями $E = E_0 \sin[\omega(t - x/v)]$ и $H = H_0 \sin[\omega(t - x/v)]$. Колебания H и E синфазны.

Длина волны $\lambda = vt$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, т.о. $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$.

Т.к. в вакууме отсутствуют токи и объемные заряды, то волновые уравнения примут вид:

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Величина $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, где c – скорость распространения ЭМВ в вакууме (**скорость света**), тогда:

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}; \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Поперечность ЭМВ. Вектор Умова–Пойнтинга

ЭМВ поперечны: вектора \vec{H} и \vec{E} перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны. Плоскость, в которой колебается вектор \vec{E} , называется **плоскостью поляризации**.

Энергия ЭМВ $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$. Т.к. $\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, $\text{rot } \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, получим: $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$ или: $w_E = w_H$, т.е. *энергии магнитного и электрического поля в ЭМВ равны*. Тогда

$$w = \varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH = \frac{EH}{c}.$$

Вектор плотности потока энергии ЭМВ называется **вектором Умова–Пойнтинга**:

$$\vec{P} = w \vec{c} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Вибратор Герца. Электрическое дипольное излучение

Простейшим излучателем ЭМВ является **вибратор Герца** и рамка с током. Вибратор герца (элементарный вибратор) – это совокупность двух металличе-

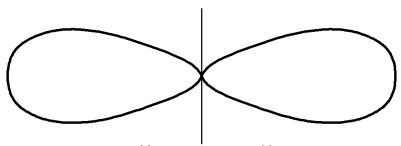
ских шариков, соединенных проводником. Если шарики зарядить противоположно, то они начинают перезаряжаться, излучая ЭМВ.

Рассмотрим излучение системы неподвижного заряда $+q$ и колеблющегося около него по гармоническому закону заряда $-q$. Дипольный момент системы $\vec{p} = -q\vec{r} = \vec{p}_m \cos \omega t$. Пусть амплитуда колебаний $l \ll \lambda$.

В каждой точке пространства E и H будут изменяться по гармоническому закону $\propto \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$. Амплитуды колебания E и H убывают по закону $\propto \frac{1}{r} \sin \theta$, где θ – угол между \vec{p} и \vec{r} . Мощность излучения $\langle P \rangle \propto \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta$.



Диаграмма направленности излучения элементарного вибратора изображена на рисунке слева. Мощность излучения определяется выражением:



$$P \propto \ddot{\vec{p}}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t; \quad \langle P \rangle \propto p_m^2 \omega^4.$$

Следовательно, при малых ω излучение незначительно. Т.к. $\ddot{\vec{p}} = -q\ddot{\vec{r}} = -q\vec{a}$, где \vec{a} – ускорение движущегося заряда, то мощность $\langle P \rangle \propto q^2 \vec{a}^2$. Т.о., если электрон движется в среде равномерно, он не излучает ЭМВ. Излучение появляется лишь в случае ускоренного движения электрона (торможение, движение по окружности, ускорение).

45 Релятивистская динамика и кинематика. Четырехмерный формализм

Преобразования Лоренца

Согласно специальной теории относительности, скорость света $c < \infty$. Скорость тела и время связаны между собой. Пусть тело движется вдоль оси X со скоростью V . **Преобразования Лоренца**:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Согласно преобразованиям Лоренца, при переходе между СК меняются не только пространственные координаты, но и время.

Однако, существует инвариант: $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ – **релятивистский интервал**.

Размеры движущихся тел сокращаются (**лоренцево сокращение**): $l = x_2(t) - x_1(t) = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Поперечные размеры при этом остаются прежними.

Собственное время τ_0 – время в собственной СК. $\tau = \tau_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, т.е. в движущейся СК время протекает медленнее.

Выделяют два типа интервалов: при $s^2 > 0$ интервал называют **пространственно-подобным**, при $s^2 < 0$ – **времениподобным**.

Из преобразований Лоренца следуют преобразования:

$$\begin{aligned} v'_{x'} &= \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, & v'_{y',z'} &= \frac{v_{y,z} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}; \\ v_x &= \frac{v'_{x'} + V}{1 - \frac{Vv'_{x'}}{c^2}}, & v_{y,z} &= \frac{v'_{y',z'} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv'_{x'}}{c^2}}; \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & \vec{p} &= \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Формализм Минковского

Для более полного отражения связи времени и пространства удобно ввести четвертую координату $x_4 = ict$. Тогда преобразования Лоренца можно задать в тензорном виде: $\hat{X}' = \hat{K}\hat{X}$, где \hat{X} и \hat{X}' – **четырехвекторы координат**,

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{iv^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-iv^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

И обратно: $\hat{X} = \hat{K}'\hat{X}'$. Т.к. $\hat{K}\hat{K}' = \hat{I}$, \hat{K}' получается из \hat{K} заменой координат $K_{\alpha\beta} \rightarrow K'_{\beta\alpha}$. Следовательно, интервал также будет обычным четырехвектором.

Пусть $u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$, тогда $\hat{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ – четырехвектор скорости. $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, $\Rightarrow u_{1,2,3} = \frac{u_{x,y,z}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, $u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Квадрат четырехвектора скорости равен $-c^2$.

Тензорный вид преобразований Лоренца справедлив и для четырехвектора скорости: $\hat{U}' = \hat{K}\hat{U}$.

Ковариантная запись закона сохранения заряда и уравнений для потенциалов

Инвариантами являются **четырехмерные дивергенция, градиент и ротор**:

$$\operatorname{div} \hat{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4}; \quad \widehat{\operatorname{grad}} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \right).$$

Удобно ввести **четырехмерный оператор набла**:

$$\widehat{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right),$$

тогда $\operatorname{div} \hat{A} = \widehat{\nabla} \hat{A}$, $\widehat{\operatorname{grad}} \varphi = \widehat{\nabla} \varphi$, $\operatorname{rot} \hat{A} = \{\widehat{\nabla} \times \hat{A}\}$ (будем обозначать **тензорное произведение векторов** как $\{\hat{A} \times \hat{B}\}$). Оператор четырех-ротора будет являться тензором, его компоненты: $(\operatorname{rot} \hat{A})_{ij} = \frac{\partial \hat{A}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial x_j}$.

Преобразуем теперь в четырехмерный вид уравнения, выражающие закон сохранения энергии,

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \rho \vec{v} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

условие Лоренца и уравнение непрерывности,

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Условие Лоренца легко преобразовать, если ввести **четырехмерный векторный потенциал**: $\hat{\Phi} = (A_x, A_y, A_z, \frac{i\varphi}{c})$. Тогда оно примет вид: $\boxed{\operatorname{div} \hat{\Phi} = 0}$, или $\widehat{\nabla} \hat{\Phi} = 0$.

Введем теперь **четырехвектор плотности тока** $\hat{S} = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, i c \rho)$. Если подействовать оператором четырех-дивергенции на четырех-градиент, получим **оператор д'Аламбера**: $\boxed{\square = \widehat{\nabla}^2}$. Этот оператор, также как и градиент, дивергенция и ротор, является инвариантом в пространстве Минковского. Волновое уравнение примет вид $\boxed{\square \hat{\Phi} = -\mu_0 \hat{S}}$. И, наконец, уравнение непрерывности: $\boxed{\operatorname{div} \hat{S} = 0}$, или $\widehat{\nabla} \hat{S} = 0$.

Пусть в штрихованной СК K' заряд покоятся и его плотность равна ρ_0 . Тогда $\hat{S}' = (0, 0, 0, i c \rho_0)$, а в движущейся СК: $\hat{S} = (\gamma \rho_0 v, 0, 0, \gamma i c \rho_0)$, где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Следовательно, в подвижной СК плотность заряда возрастает в γ раз по сравнению с неподвижной СК.

Т.к. элемент объема $dV = dV_0/\gamma$, то $dq = \rho dV = \rho_0 dV_0 = dq_0$: заряд является еще одним инвариантом в пространстве Минковского (закон сохранения заряда: $dq' = dq$). Тогда можно записать: $\hat{S} = \rho_0 \hat{U}$, где \hat{U} – четырех-скорость.

Тензор энергии–импульса электромагнитного поля

Выразим в четырехмерном виде уравнения $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ и $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Получим: $E_{x,y,z} = ic\left(\frac{\partial \hat{\Phi}_4}{\partial x_{1,2,3}} - \frac{\partial \hat{\Phi}_{1,2,3}}{\partial x_4}\right)$, $B_{x,y,z} = \frac{\partial \hat{\Phi}_{3,1,2}}{\partial x_{2,3,1}} - \frac{\partial \hat{\Phi}_{2,3,1}}{\partial x_{3,1,2}}$. Совокупность этих уравнений удобно представить в виде тензора $\hat{H}_{\mu\nu} = c\left(\frac{\partial \hat{\Phi}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \hat{\Phi}_\mu}{\partial x_\nu}\right)$:

$\hat{H} = c \text{rot } \hat{\Phi} = c\{\hat{\nabla} \times \hat{\Phi}\}$. Компоненты тензора \hat{H} :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем также тензор \hat{F} :

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Несложно получить преобразования \hat{H} и \hat{F} между СК. Пусть тензор $\hat{T} = \{\hat{A} \times \hat{B}\}$ – тензорное произведение векторов \hat{A} и \hat{B} . Тогда $\hat{T}' = \{\hat{A}' \times \hat{B}'\} = \{(\hat{K}\hat{A}) \times (\hat{K}\hat{B})\}$, $\Rightarrow \hat{T}'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu} \hat{K}_{\alpha\mu} \hat{K}_{\beta\nu} \hat{T}_{\mu\nu}$.

Сила Лоренца $\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ в пространстве Минковского примет вид $\hat{f}_\mu = \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} S_\nu$, что позволяет записать: $\hat{f} = \frac{1}{c} \hat{H} \hat{S}$. $\vec{F} = \int \vec{f} dV$. Пусть $\widehat{dV} = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. $\widehat{dV}' = |D| \widehat{dV}$, где $D_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha}$ – якобиан (определитель) преобразования координат. Т.к. $|D| = 1$, получим: $\widehat{dV}' = \widehat{dV}$, т.е. четырехмерный объем инвариантен в пространстве Минковского.

Аналогичными инвариантами являются четырех-импульс $\widehat{dP}_\nu = f_\nu dx_1 dx_2 dx_3 dt$ и четырех-сила $\hat{K}_\nu = \int \frac{dP_\nu}{d\tau} = \int f_\nu \gamma dV$, $\hat{K} = (\gamma F_x, \gamma F_y, \gamma F_z, \gamma^{\frac{i}{c}} e \vec{v} \vec{E})$.

Плотность энергии ЭМП $w = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$, вектор Умова $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ и импульс ЭМП $\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H}$ можно также представить в виде одного четырехмерного тензора **энергии–импульса**:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & -icg_x \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & -icg_y \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & -icg_z \\ -\frac{i}{c} S_x & -\frac{i}{c} S_y & -\frac{i}{c} S_z & w \end{pmatrix},$$

где $T_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \sum_\alpha H_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \delta_{\mu\nu} \frac{1}{4c} \sum_{\alpha,\gamma} F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma}$. Главная диагональ тензора энергии–импульса является тензором *напряжений*, характеризуя поверхностные силы.

Ковариантная запись уравнений Максвелла. Инварианты магнитного поля

$$\text{rot } \vec{H} = \rho \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \text{ div } \vec{D} = \rho.$$

$$0 + \frac{\partial H_z}{\partial x_2} - \frac{\partial H_y}{\partial x_3} - \frac{\partial (icD_x)}{\partial x_4} = \rho v_x; -\frac{\partial H_z}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial H_z}{\partial x_3} - \frac{\partial (icD_y)}{\partial x_4} = \rho v_y;$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x_1} - \frac{\partial H_x}{\partial x_2} + 0 - \frac{\partial (icD_z)}{\partial x_4} = \rho v_z; \frac{\partial (icD_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial (icD_y)}{\partial x_2} + \frac{\partial (icD_z)}{\partial x_3} + 0 = ic\rho.$$

Эти уравнения удобно записать с помощью тензора \hat{F} :

$$\sum_\nu \frac{\partial \hat{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = S_\mu.$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{ div } \vec{B} = 0.$$

$$\frac{\partial (cB_x)}{\partial x_4} + \frac{\partial (-iE_z)}{\partial x_2} + \frac{\partial (iE_y)}{\partial x_3} = 0; \frac{\partial (-iE_z)}{\partial x_1} + \frac{\partial (iE_x)}{\partial x_3} + \frac{\partial (-cB_y)}{\partial x_4} = 0;$$

$$\frac{\partial (iE_x)}{\partial x_2} + \frac{\partial (cB_z)}{\partial x_4} + \frac{\partial (-iE_y)}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial (cB_z)}{\partial x_3} + \frac{\partial (cB_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial (cB_y)}{\partial x_2} = 0.$$

Здесь удобно использовать тензор \hat{H} :

$$\frac{\partial \hat{H}_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \hat{H}_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \hat{H}_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu \neq \lambda.$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_{\nu}^{(0)} = \varepsilon_0 \sum_{\nu} \hat{H}_{\mu\nu} \hat{U}_{\nu}^{(0)};$$

$$\frac{1}{c} (\hat{H}_{\mu\nu} \hat{U}_{\lambda}^{(0)} + \hat{H}_{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu}^{(0)} + \hat{H}_{\lambda\mu} \hat{U}_{\nu}^{(0)}) = \mu_0 (\hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_{\lambda}^{(0)} + \hat{F}_{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu}^{(0)} + \hat{F}_{\lambda\mu} \hat{U}_{\nu}^{(0)}).$$

Здесь $\hat{U}^{(0)} = (0, 0, 0, ic)$ – скорость покоящейся СК.

Однако, эти уравнения справедливы и для любой ненулевой скорости:

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_{\nu} = \varepsilon_0 \sum_{\nu} \hat{H}_{\mu\nu} \hat{U}_{\nu};$$

$$\frac{1}{c} (\hat{H}_{\mu\nu} \hat{U}_{\lambda} + \hat{H}_{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu} + \hat{H}_{\lambda\mu} \hat{U}_{\nu}) = \mu_0 (\hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_{\lambda} + \hat{F}_{\nu\lambda} \hat{U}_{\mu} + \hat{F}_{\lambda\mu} \hat{U}_{\nu}).$$

Таким образом, получим связь электрического и магнитного полей:

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H} = \varepsilon_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

$$\vec{B} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{v} \times \vec{D}).$$

Преобразование этих величин между СК: $E'_{x'} = E_x$, $E'_{y'} = \gamma(E_y - vB_z)$, $E'_{z'} = \gamma(E_z + vB_y)$ (аналогично для \vec{D}). $B'_{x'} = B_x$, $B'_{y'} = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z)$, $B'_{z'} = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y)$ (аналогично для \vec{H}).

Преобразования между СК удобно записывать в векторном виде для проекций векторов на вектор скорости (\vec{X}_{\parallel}) и перпендикулярно ему (\vec{X}_{\perp}): $\vec{D}'_{\parallel} = \vec{D}_{\parallel}$, $\vec{D}'_{\perp} = \gamma(\vec{D} + \vec{v} \times \vec{H}/c^2)_{\perp}$ (аналогично для \vec{E}). $\vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}$, $\vec{H}'_{\perp} = \gamma(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D})_{\perp}$ (аналогично для \vec{B}).

Получим следующие инварианты:

$$I_1 = c^2 B^2 - E^2, \quad I'_1 = H^2 - c^2 D^2;$$

$$I_2 = \vec{B} \cdot \vec{E}, \quad I'_2 = \vec{H} \cdot \vec{D};$$

$$I_3 = \vec{H} \cdot \vec{B} - \vec{D} \cdot \vec{E}.$$

Следствия:

1. если $c^2 B^2 > E^2$ и $\vec{B} \perp \vec{E}$, то возможно выбрать СК, в которой ЭП равно нулю при ненулевом МП ($E = 0$ при $H \neq 0$), если же вектора \vec{B} и \vec{E} не перпендикулярны, такой СК не существует;
2. если $c^2 B^2 < E^2$ и $\vec{B} \perp \vec{E}$, то существует СК, в которой отсутствует МП при ненулевом ЭП, однако, если МП и ЭП не перпендикулярны, такой СК не существует;

3. если в какой-либо СК существует только ЭП или только МП, то при переходе к другой СК возможно существование как ЭП, так и МП, причем эти поля будут перпендикулярны друг другу;
4. если $c^2 B^2 = E^2$ и $\vec{B} \perp \vec{E}$, то данная волна будет оставаться плоской во всех СК.

46 Электродинамика движущихся сред

Материальные уравнения для движущихся сред

Необходимо сформулировать уравнения Максвелла (УМ) для движущихся сред. Для этого нужно записать известные для неподвижных сред УМ в ковариантном виде (в виде тензорных уравнений). Кроме того, т.к. известны формулы преобразования тензоров при смене СК, легко получить преобразования векторов поля.

УМ в вакууме пригодны и для описания полей в других средах, если умножить их на ε и μ :

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = S_\mu; \quad \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0;$$

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 F_{\mu\nu} U_\nu = \varepsilon \varepsilon_0 \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} U_\nu;$$

$$\frac{1}{c} (H_{\mu\nu} U_\lambda + H_{\nu\lambda} U_\mu + H_{\lambda\mu} U_\nu) = \mu_0 \mu (F_{\mu\nu} U_\lambda + F_{\nu\lambda} U_\mu + F_{\lambda\mu} U_\nu).$$

Здесь $U = (\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, \gamma i c)$ — четырехвектор скорости; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$; $S = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, i c \rho)$ — четырех-плотность тока;

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Материальные уравнения можно записать и так:

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \mu \mu_0 (\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}).$$

Законы преобразования \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{P} , \vec{M}

При переходе от одной СК к другой тензоры преобразуются по формуле: $F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\gamma} a_{\mu\gamma} a_{\nu\gamma} F_{\alpha\gamma}$, где \hat{a} — матрица перехода:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{iv^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-iv^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим следующие формулы.

$$\begin{aligned} E'_{x'} &= E_x, & E'_{y'} &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_{z'} &= \gamma(E_z + vB_y); \\ D'_{x'} &= D_x, & D'_{y'} &= \gamma(D_y - \frac{v}{c^2}H_z), & D'_{z'} &= \gamma(D_z + \frac{v}{c^2}H_y); \\ B'_{x'} &= B_x, & B'_{y'} &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), & B'_{z'} &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y); \\ H'_{x'} &= H_x, & H'_{y'} &= \gamma(H_y + vD_z), & H'_{z'} &= \gamma(H_z - vD_y). \end{aligned}$$

Инварианты: $I_1 = c^2B^2 - E^2$, $I'_1 = H^2 - c^2D^2$, $I_2 = \vec{B}\vec{E}$, $I'_2 = \vec{H}\vec{D}$, $I_3 = \vec{H}\vec{B} - \vec{D}\vec{E}$.

Т.к. при $v = 0$, $\vec{D} = \epsilon_0(\vec{E} + \vec{P})$, $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, получим формулы для поляризованности и намагничения:

$$\begin{aligned} P'_{x'} &= P_x, & P'_{y'} &= \gamma(P_y + \frac{v}{c^2}M_z), & P'_{z'} &= \gamma(P_z - \frac{v}{c^2}M_y); \\ M'_{x'} &= M_x, & M'_{y'} &= \gamma(M_y - vP_z), & M'_{z'} &= \gamma(M_z + vP_y). \end{aligned}$$

Основные уравнения электродинамики медленно движущихся проводников

Четырехвектор тока: $\hat{S} = (j_x, j_y, j_z, ic\rho)$. Пусть в СК K' заряд неподвижен: $\hat{S}' = (0, 0, 0, ic\rho')$. Преобразуя, получим: $\hat{S} = \hat{a}\hat{S}'$, $\Rightarrow \hat{S} = (\gamma\rho'v, 0, 0, \gamma ic\rho')$. Т.о., как и ожидалось, движение заряда порождает электрический ток $j_x = \gamma\rho'v$.

Рассмотрим теперь движущийся проводник с током: в K' имеется ток проводимости, но отсутствует плотность заряда: $\hat{S}' = (j'_x, j'_y, j'_z, 0)$, тогда в СК K появится плотность заряда: $\hat{S} = (\gamma j'_x, j'_y, j'_z, \gamma i j'_x v/c)$, $\Rightarrow \rho = j_x v/c^2$ или $\rho = \vec{v}\vec{j}/c^2$. Однако, согласно закона сохранения заряда, $\rho dV = \vec{v}/c^2 \int \vec{j} dV = 0$. Т.о., возникновение объемной плотности заряда в движущемся проводнике —

релятивистский эффект, объясняющийся тем, что ионы кристаллической решетки неподвижны относительно проводника, а электроны движутся.

Движущаяся рамка с током приобретает дипольный момент, т.к. разные ее стороны приобретают разные по знаку заряды. $p = vIl'l'/c^2 = vIS/c^2 = vp_m/c^2$, или $\vec{p} = \vec{v} \times \vec{p}_m/c^2$. Т.о., при движении магнитный момент порождает электрический. Этот факт объясняет появление тонкой структуры у излучающих атомов.

Закон Ома можно записать в тензорной форме по аналогии: $\vec{j} = \alpha \vec{E}$, $S_\mu = \alpha/c \sum_\nu H_{\mu\nu} U_\nu$ или $\hat{S} = \hat{H} \hat{U}$. Это уравнение можно разложить на два: $\vec{j} = \gamma \alpha (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ и $\rho = \vec{j} \cdot \vec{v}/c^2$.

Основные уравнения магнитной гидродинамики в идеальной проводящей жидкости

Если проводящая жидккая (или газообразная) среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамических движениях в этой среде индуцируются электрические поля и возникают электрические токи. Но на токи в магнитном поле действуют силы, которые могут существенно повлиять на движение жидкости. С другой стороны, эти токи меняют и само магнитное поле. Т.о., возникает сложная картина магнитных и гидродинамических явлений, которая должна рассматриваться на основе совместной системы уравнений поля и уравнений движения жидкости.

В качестве уравнений поля в движущейся проводящей среде мы будем пользоваться уравнениями

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) = \frac{c^2 \Delta H}{4\pi\sigma\mu}, \quad \text{div } H = 0.$$

Магнитная проницаемость сред, о которых может идти речь в магнитной гидродинамике, мало отличается от единицы, и это отличие не имеет значения для изучаемых здесь явлений. Поэтому будем полагать $\mu = 1$. Т.о., имеем уравнения

$$\text{div } H = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) + \frac{c^2 \Delta H}{4\pi\sigma}.$$

Гидродинамические уравнения содержат, прежде всего, уравнение непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ и уравнение Навье–Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta \Delta v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \vec{v} + \frac{\vec{f}}{\rho},$$

где η , ξ – два коэффициента вязкости жидкости, а f – объемная плотность сторонних, в данном случае электромагнитных, сил. Имеем $\vec{f} = \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \text{rot } \vec{H} \times \vec{H}$. Т.о., уравнение движения жидкости принимает вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} \vec{H} \times \text{rot } \vec{H} + \frac{\eta \Delta v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}.$$

К этим уравнениям надо еще присоединить уравнение состояния $p = p(\rho, T)$, связывающее между собой давление, плотность и температуру жидкости, и уравнение переноса тепла. В «обычной» гидродинамике последнее имеет вид:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\chi \nabla T).$$

Здесь s – энтропия единицы массы жидкости, выражение в левой стороне равенства представляет собой количество тепла (отнесенное к ед. объема), выделяющееся за ед. времени в движущемся элементе жидкости. Выражение в правой стороне равенства есть энергия, диссилируемая в том же объеме за ед. времени.

Уравнение переноса тепла в магнитной гидродинамике:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\chi \nabla T) + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} (\text{rot } \vec{H})^2.$$

Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\text{div } q.$$

47 Плоские электромагнитные волны в прозрачном веществе

Волновое уравнение. Скорость света в однородных изотропных телах

Электромагнитные волны (ЭМВ) – возмущения ЭМП (т.е. переменное ЭМП), распространяющиеся в пространстве. Утверждение о существовании ЭМВ следует из уравнений Максвелла для ЭМП вдали от свободных электрических зарядов и макротоков: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; $\text{div } \vec{D} = 0$; $\text{div } \vec{B} = 0$ – и материальных уравнений: $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ (в однородных изотропных средах). Следовательно, $\text{rot } \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$; $\text{rot } \vec{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\text{div } \vec{E} = 0$; $\text{div } \vec{H} = 0$.

Тогда $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$. Т.к. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$, а $\operatorname{div} \vec{E} = \rho = 0$, получим **волновое уравнение**:

$$\boxed{\Delta \vec{H} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}, \quad \boxed{\Delta \vec{E} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0},$$

$\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 = 1/v^2$, где v – скорость распространения ЭМВ. $v = c(\varepsilon\mu)^{-1/2}$, где c – скорость распространения ЭМВ в вакууме (**скорость света**), $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. Т.к. у диэлектриков $\mu \sim 1$, записывают $v = c/\sqrt{\varepsilon}$.

ЭМВ являются плоскими, т.е. у них $\vec{E}\vec{H} = 0$, $\vec{E}\vec{v} = 0$, $\vec{H}\vec{v} = 0$. Напряженности ЭП и МП в ЭМВ связаны: $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$.

Плотность энергии и импульса ЭМВ. Вектор Умова–Пойнтинга

В линейной изотропной среде плотность энергии ЭМВ $w = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2 + \frac{1}{2}\mu\mu_0H^2$, или:

$$w = \varepsilon\varepsilon_0E^2 = \mu\mu_0H^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}EH.$$

В случае плоской линейно поляризованной волны $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{x})$ ($\vec{k} = 2\pi/\lambda$), $\vec{H} = \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{x})$, $\Rightarrow w = \varepsilon\varepsilon_0E_0 \sin^2(\omega t - \vec{k}\vec{x})$; $\langle w \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2$. Для произвольно поляризованного излучения $\vec{E} = \vec{E}_1 \sin(\omega t + \vec{k}\vec{x}) + \vec{E}_2 \sin(\omega t + \vec{k}\vec{x} + \varphi)$, $\langle w \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0(E_1^2 + E_2^2)$.

Вектором Умова–Пойнтинга называют вектор плотности потока энергии ЭМВ:

$$\boxed{\vec{P} = \omega\vec{v} = \vec{E} \times \vec{H}}.$$

Для линейно поляризованной волны $P = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2 \sin^2(\omega t - kx)$.

Интенсивность ЭМВ $I = |\langle \vec{P} \rangle| = \langle w \rangle v$. Под интенсивностью света обычно понимают E^2 . Для линейно поляризованных волн $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2$, для эллиптически поляризованных: $I = I_x + I_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}(E_1^2 + E_2^2)$.

Плотность импульса ЭМВ. Давление света. Опыты Лебедева

На объем V со стороны ЭМП действует сила $\vec{F} = \int_V \vec{f} dV$, где $\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}$ –

плотность силы Лоренца. Уравнения Максвелла: $\rho\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\rho =$

$\operatorname{div} \vec{D}, \Rightarrow$

$$\vec{f} = \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}.$$

Т.к. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ и $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, \Rightarrow

$$\vec{f} = \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}),$$

$$f_x = \operatorname{div} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B})_x,$$

$$\Phi_x = D_x E_x + H_x B_x - \frac{\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{2}, \quad \Phi_y = D_y E_y + H_y B_y, \quad \Phi_z = D_z E_z + H_z B_z.$$

Т.к. $\vec{D} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}/c^2$, получим:

$$F_x = \int_V f_x dV = \int_V \operatorname{div} \Phi dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H})_x dV, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{G}^{\text{част}}}{dT},$$

где $\vec{G}^{\text{част}}$ – импульс частиц в объеме V , \Rightarrow

$$\frac{d}{dt} \left(G_x^{\text{част}} + \int \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H})_x dV \right) = \int_S \Phi dS \equiv F_x^{\text{пov}}.$$

Импульс ЭМП: $G_x = \int \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H})_x dV$, $\vec{G} = \int_V \vec{g} dV$, где \vec{g} – **плотность импульса ЭМП**, $\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H} = \vec{P}/c^2$.

Таким образом, можно вычислить давление, оказываемое ЭМП при нормальном падении на некоторую поверхность: $p = cg = EH/c = \epsilon_0 E^2 = w$. Согласно теории Максвелла, $p = I(1+R) \cos^2 i/v = \langle w \rangle (1+R) \cos^2 i$, где R – коэффициент отражения, i – угол падения ЭМВ.

Опыты Лебедева:

1. Исследование прохождения ЭМВ с длиной волны $\lambda = 6$ мм в кристаллах (результат опыта: открытие двойного лучепреломления ЭМВ).
2. Измерение светового давления на твердые тела и газы (результат: подтверждение теории Максвелла).

Поглощение электромагнитных волн

Поглощение света — явление уменьшения энергии ЭМВ при ее распространении в веществе (вследствие преобразования энергии волны во внутреннюю энергию вещества, либо в энергию вторичного излучения).

Закон Бугера–Ламберта: интенсивность прошедшего через слой вещества толщиной x изменяется по закону $I = I_0 \exp(-a'x)$, где a' — **натуральный показатель поглощения среды**. Для разбавленных растворов справедлив **закон Бэра**: $a' = bc$, где c — концентрация раствора. В сильно концентрированных растворах закон Бэра нарушается вследствие взаимодействия молекул вещества.

Согласно закону Бугера–Ламберта, $E = E_0 \exp(-\frac{1}{2}a'x) \cos(\omega t - \vec{k}\vec{x})$, или $E = E_0 \exp(i\omega[t - \tilde{n}x/c])$. Величину $\tilde{n} = n - i\varkappa$ называют **комплексным показателем преломления** вещества, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — **показатель преломления**,

$$\varkappa = \frac{a'c}{2\omega} = \frac{a'\lambda_0}{4\pi}$$
 — **главный показатель поглощения**, $\lambda_0 = n\lambda$ — длина волны света в вакууме.

Модулирование волны. Волновые пучки и пакеты

Модуляция — изменение по какому-либо закону одного из параметров периодического колебания (амплитуды, частоты или фазы).

Амплитудная модуляция: $A = A_0 b(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, где A — напряженность магнитного, либо электрического поля в волне. $b(t)$ — закон модуляции волны. Если $b(t) = b_0 \cos \Omega t$, то такую волну можно характеризовать как суперпозицию трех волн с частотами ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$. Волну с частотой ω называют **несущей**, а $\omega_0 \pm \Omega$ — **боковыми составляющими**.

Частотная модуляция: $A = A_0 \sin(\omega_0[1 + b(t)]t + \varphi_0)$, $b(t) < 1$, $\Omega \ll \omega_0$. При гармоническом законе модуляции $A = A_0 \sin(\omega_0[1 + b_0 \cos \Omega t]t + \varphi_0)$.

Фазовая модуляция: $A = A_0 \sin(\omega_0 t + b(t))$, $b(t) = \Delta\varphi \cos \Omega t$, $\Omega \ll \omega_0$.

В общем случае могут сочетаться разные виды модуляции (например, биения).

Волновой пакет — суперпозиция волн, с частотами, мало отличающимися друг от друга (от $\omega_0 - \Delta\omega/2$ и до $\omega_0 + \Delta\omega/2$, где $\Delta\omega$ — **ширина волнового пакета**):

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \varphi_\omega) d\omega.$$

Согласно принципу суперпозиции волн и основам Фурье-анализа, любую несинусоидальную волну можно заменить суммой синусоидальных, эквивалент-

ной ей, т.е. представить волну в виде группы волн (волнового пакета). Совокупность частот данного волнового пакета называется **спектром частот** рассматриваемой несинусоидальной волны.

Простейшей группой волн является квазисинусоидальная плоская волна, получающаяся в результате суммирования двух распространяющихся вдоль оси X волн с равными амплитудами и близкими частотами:

$$A = A_0[\sin(\omega t - kx) + \sin((\omega + d\omega)t - (k + dk)x)] = 2A_0 \cos \frac{1}{2}(t d\omega - x dk) \sin(\omega t - kx).$$

Эта волна характеризуется переменной амплитудой $A_1 = 2A_0 \cos \frac{1}{2}(t d\omega - x dk)$, медленно изменяющейся с изменением времени и расстояния.

За **скорость распространения** несинусоидальной волны принимают скорость перемещения точки M с фиксированной амплитудой, т.е. из условия $A_1 = \text{const}$, получим: $t d\omega - x dk = \text{const}$, $\Rightarrow u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$ — **групповая скорость**, в отличие от **фазовой скорости**: $v = \omega/k$. Групповая и фазовая скорости связаны между собой: $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$.

Монохромные и квазимонохромные волны.

Монохромная световая волна — ЭМВ одной определенной частоты ω , т.е. синусоидальная ЭМВ. Т.о., **квазимонохромной** можно назвать квазисинусоидальную волну — волновой пакет.

Если ширина волнового пакета $\Delta\omega$ значительно меньше основной частоты ω_0 , волну называют **узкополосной**. Соответственно, при $\Delta\omega \gtrsim \omega_0$ ее называют **широкополосной**.

Фурье-анализ и Фурье-синтез волновых полей

Рассмотрим комплексную амплитуду плоской волны $E = \frac{1}{2}\mathcal{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t)$, удовлетворяющую **уравнению Гельмгольца**: $\Delta\mathcal{E} + k^2\mathcal{E} = 0$ ($k = \omega/c$). Найдем решение уравнения, удовлетворяющее ГУ $\mathcal{E}(x, y, z)|_{x=y=z=0} = \mathcal{E}_0(x, y)$, волна распространяется вдоль оси OZ .

Разложим двумерное поле $\mathcal{E}_0(x, y)$ в интеграл Фурье:

$$\mathcal{E}_0(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(k_x, k_y) \exp(-i[k_x x + k_y y]) dk_x dk_y.$$

Из уравнения Гельмгольца $\mathcal{E}(k_x, k_y, z) = \mathcal{E}_0(k_x, k_y) \exp(-iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})$ получим:

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x', y') H(x - x', y - y', z) dx' dy',$$

где $H(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(k_x x + k_y y + z\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})] dk_x dk_y$ — **функция Грина**.

Если световой пучек расходится слабо, т.е. $k_x^2 \ll k^2$ и $k_y^2 \ll k^2$, то $H = \frac{i}{\lambda z} \exp(-ik[z + \frac{1}{2z}\{x^2 + y^2\}])$, тогда

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x', y') \exp\left(-\frac{ik}{2z}[(x - x')^2 + (y - y')^2]\right) dx' dy'.$$

Таким образом, *волновая картина в любом участке преобразования является преобразованием Фурье начальной плоской волны*. Преобразователем Фурье можно выбрать, например, линзу — распределение света в ее фокальной плоскости приобретает форму **пространственного спектра** поля, падающего на линзу (**Фурье-анализ изображения**). Так получают Фурье-спектры оптических изображений.

Можно провести и обратную операцию — **Фурье-синтез** изображения. При построении объекта линзой мы сначала проводим Фурье-анализ объекта (область от линзы до ее фокальной плоскости), получая в задней фокальной плоскости Фурье-образ поля, испущенного объектом, затем в пространстве между задней фокальной плоскостью и плоскостью изображения происходит Фурье-синтез изображения.

Кроме линзы преобразователями Фурье являются дифракционные приборы: дифракционные решетки, интерферометр Фабри–Перо и т.п.

Фурье-фильтрация изображений

Опыты Аббе–Поттера основывается на свойствах двумерного преобразования фурье. Так, если в передней фокальной плоскости линзы поместить щель, на изображении будут размыты элементы, параллельные щели. При этом если наблюдать изображение решетки, помещая щель параллельно одной из ее сторон, получим изображение только полос, перпендикулярных щели.

Метод темного поля применяется в микроскопии прозрачных объектов: в фокусе микроскопа помещается непрозрачный диск, что приводит к уменьшению общей освещенности фона и протяженных объектов (малые пространственные частоты, граница которых определяется размером диска) и повыше-

нию контраста мелких деталей. Т.е. в этом случае задерживаются прямые лучи, не несущие информации о структуре объекта.

Метод фазового контраста: при прохождении через объект с варьирующимся показателем преломления, свет приобретает фазовый рельеф, который при помощи фазовой пластиинки, размещенной в фокусе микроскопа, можно превратить в амплитудный рельеф (фоновая волна сдвигается на половину периода, что позволяет еще лучше увеличить контраст изображения, чем метод темного поля).

Голография — наиболее полный метод Фурье-анализа, записи и синтеза изображения, основанный на явлении **интерференции**.

Спектральная плотность мощности

Спектральная плотность излучения: $\rho(\omega, T) = \frac{dw}{d\omega}$, где T — температура излучающего абсолютно черного тела (АЧТ), w — плотность мощности излучения. Тогда плотность излучения $w = \int_0^{\infty} \rho d\omega$. Равновесное излучение АЧТ является изотропным (т.е. оно не поляризовано и равновероятно распространяется во всех направлениях).

Энергия излучения, падающего за единицу времени на единицу площади какого-либо тела, определяется выражением $dW = \frac{c}{4} \rho(\omega, T) d\omega$. Функцию $r_{\omega}^* = \frac{c}{4} \rho(\omega, T)$ называют **функцией Кирхгофа**, она определяется как отношение коэффициента излучения АЧТ на данной частоте к коэффициенту поглощения данным телом. Согласно Планку,

$$\rho(\omega, T) = \frac{2}{\pi c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

Радиационное трение

Радиационным трением называется сила, действующая на заряженную частицу со стороны создаваемого ею поля электромагнитного излучения. Движение заряда с ускорением приводит к возникновению излучения, уносящего часть энергии и импульса, поэтому система неравномерно движущихся зарядов не является замкнутой. Такая система ведет себя как механическая система с наличием сил трения. Определить такую силу трения можно, зная теряемую в единицу времени энергию. Так, для нерелятивистского электрона интенсивность излучения составит $I = 2e^2 a^2 / (3c^3)$, где a — ускорение. Сила трения при

приближенно периодическом движении описывается **формулой Лоренца**:

$$F = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{da}{dt}.$$

Радиационное трение приводит к затуханию колебаний заряда, что проявляется в уширении спектральной линии излучения.

Действие радиационного трения на заряд приводит к принципиальным трудностям, тесно связанным с проблемой структуры электрона, природы его массы. Практически для учета действия радиационного трения имеет смысл лишь приближенная постановка задачи методом последовательных приближений. Такой метод дает хорошие результаты для излучения с длиной волны $\lambda \gg r_0 = e^2/m_e c^2$ («классический радиус» электрона). Реально уже при $\lambda \approx 1 \text{ \AA}$ необходимо учитывать квантовые эффекты.

48 Явление интерференции

Интерференция монохроматических волн. Получение интерференционной картины делением фронта (Юнг) и амплитуды (Френель)

Интерференция — явление усиления или ослабления света при наложении световых волн. При сложении двух волн $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$ результирующая интенсивность равна $I = \frac{1}{2}I_0(1 + \cos \delta)$, где δ — разность фаз волн в данной точке.

Максимальная интенсивность наблюдается в случае, когда $\delta = 2\pi k$, минимальная — при $\delta = (2k + 1)\pi$.

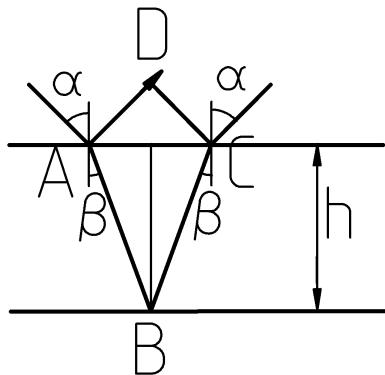
Получить интерференционную картину можно, разделяя волновой фронт на части (метод Юнга — интерференция на двух щелях, дифракционной решетке), или же деля амплитуду волны (Френель — дифракция в ближней зоне).

Метод Юнга заключается в делении волнового фронта двумя узкими щелями, играющими роль когерентных вторичных источников. Метод Френеля состоит в делении амплитуды волны двумя зеркалами, расположенными под углом, близким к 180° друг к другу. Роль вторичных когерентных источников играют изображения входной щели.

Полосы равных толщин и наклона

Полосы равного наклона

При интерференции в плоскопараллельной пластинке наблюдается наложение волн, отраженных от передней и задней стенок. Разность хода волн равна $\Delta = 2ABn - AD$, где n — показатель преломления плоскопараллельной пластины. $AD = AC \sin \alpha$, $AC = 2AB \sin \beta$, $AB = h / \cos \beta$, $\Rightarrow \Delta = 2hn \cos \beta$.



Т.е. Δ зависит от угла падения света (по закону Снеллиуса, $\sin \alpha = n \sin \beta$). Таким образом, при интерференции на плоскопараллельной пластине в дальнем поле наблюдаются полосы равного наклона.

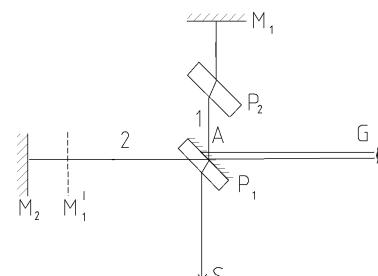
Полосы равной толщины

Данная интерференционная картина наблюдается при интерференции на клине. Разность фаз $\Delta \approx 2hn \cos \beta$ зависит в данном случае от толщины h , т.е. интерференционная картина наблюдается в ближнем поле, и, в отличие от полос равного наклона, полосы равной толщины являются действительным изображением.

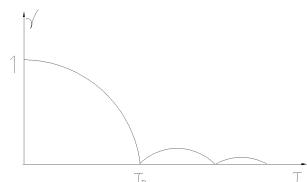
Интерферометр Майкельсона

На схеме обозначены: P_1 — полупрозрачное зеркало, P_2 — компенсатор (сделанный из того же материала, что и P_1 и имеющий ту же толщину, но лишенный зеркального покрытия).

В случае, когда на вход интерферометра Майкельсона попадает параллельный пучек света, наблюдаются интерференционные полосы, в случае расходящегося пучка — кольца равного наклона (как и в случае, когда M_1 и M_2 не перпендикулярны).



Когерентность волн



Когерентность — упорядоченность структуры света, близость ее к идеальной гармонической волне.

Временная когерентность. Для характеристики интерференционной картины вводят величину — **видность**

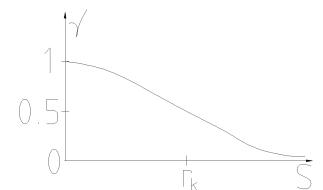
$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$. На рисунке представлена экспериментальная зависимость видности от относительной задержки лучей в интерферометре τ . Величину τ_k называют **временем когерентности**, а $l_k = c\tau_k$ — **длиной когерентности**.

Можно доказать, что γ является коэффициентом автокорреляции комплексной амплитуды излучения $E(t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(t)\exp(i\omega_0 t)$:

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t+\tau) \rangle}{\langle \mathcal{E}\mathcal{E}^* \rangle}.$$

Это обосновывает интерференцию на тонких пленках и ее отсутствие в толстых пластинах.

Пространственная когерентность. Опыт показывает, что видность зависит и от расстояния между щелями в опыте Юнга. Назовем пространственной когерентностью способность света давать интерференционную картину в интерферометре Юнга. Параметр r_k называют **радиусом когерентности**. Его легко измерить экспериментально при помощи интерферометра Юнга.



Фурье–спектроскопия

Интерферометр Майкельсона можно использовать для прямого измерения автокорреляционной функции $B(\tau) = \langle E(t)E(t+\tau) \rangle$. Согласно **теореме Винера–Хинчина**, $B(\tau)$ связана со спектром мощности $G(\omega)$ Фурье–преобразованием:

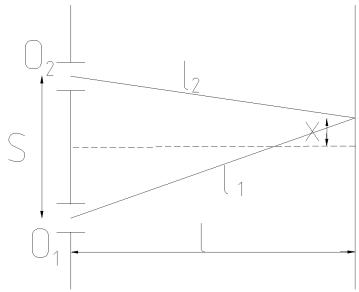
$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Фурье–спектрометры осуществляют непрерывное кодирование длин волн с помощью интерференционной модуляции, представляющей собой интерферометр Майкельсона. При равномерном перемещении зеркала M_2 в интерференционной картине возникает периодическое мерцание от каждой монохроматической составляющей входного излучения. Суперпозиция таких вкладов от всего поступающего на вход интерферометра спектра регистрируется в функции разности хода, при преобразовании которой с помощью ЭВМ получают искомый спектр.

Фурье–спектрометры одновременно реализуют два выигрыша: за счет многоканальности и за счет увеличения входного отверстия. Они наиболее эффективны при регистрации спектров слабых излучений (особенно в ИК области, где уменьшаются требования к точности изготовления интерферометра). Решение таких спектрографов в ИК области достигает величины $3 \cdot 10^6$.

Интерферометр Юнга. Звездный интерферометр Майкельсона

Интерферометр Юнга



Интерферометр Юнга представляет собой две щели, разнесенные на расстояние S друг от друга и представляющие собой вторичные когерентные источники. Обычно $L \gg x \gg S$. Суммарная освещенность экрана $E = E_1 + E_2$, где $E_1 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_1 \exp(i\omega_0[t - l_1/c])$, $E_2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_2 \exp(i\omega_0[t - l_2/c])$. Интенсивность $I = 2I_0(1+R)$, где $R = \langle E_1 E_2 \rangle / \langle E^2 \rangle$.

Положим для простоты $\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \rangle = \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \rangle$. Тогда $\langle E_1 E_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \rangle \cos(k_0 \Delta)$, где $k_0 = \omega_0/c$, $\Delta = l_1 - l_2$ – разность хода между лучами.

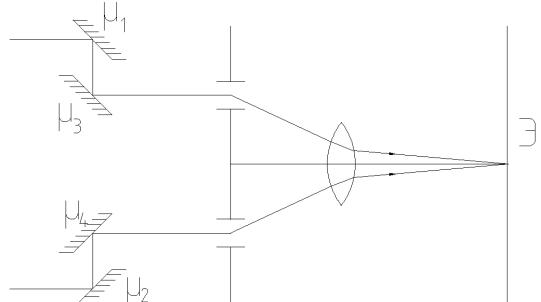
Пусть $\vec{r}_1 = \vec{r}$, $\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{S}$, $\vec{S} = \overrightarrow{O_1 O_2}$, тогда $R = b(\vec{S}) \cos(k_0 \Delta)$,
 $b = \frac{\langle \mathcal{E}(\vec{r}) \mathcal{E}(\vec{r} + \vec{S}) \rangle}{\langle \mathcal{E} \mathcal{E}^* \rangle}$; $\Delta = Sx/L$. Пусть $q = Sk_0/L$, тогда
 $\langle I \rangle = 2I_0[1 + b(\vec{S}) \cos qx]$.

Период интерференционной картины $\delta x = \lambda L/S$. Таким образом, по интерференционной картине можно определить длину волны входящего излучения.

Звездный интерферометр Майкельсона

Для измерения угловых размеров близких звезд используется звездный интерферометр Майкельсона. Зеркала M_3 и M_4 неподвижны, а M_1 и M_2 симметрично смещаются, удаляясь или сближаясь.

Видность картины зависит от расстояния l между зеркалами M_1 и M_2 . Определим значение l , при которой видность равна нулю. Это расстояние имеет порядок длины когерентности $r_{\text{ког}}$. Т.к. $r_{\text{ког}} = \lambda/\varphi$, получим: $\varphi = \lambda/l$, где φ – угловой размер звезды. Более точный расчет дает $\varphi = 1.22\lambda/l$.



Оценка длины когерентности

Рассмотрим неточечный источник диаметра a . Очевидно, размер источника не будет влиять вид интерференционной картины в случае, когда разности хода лучей от краев источника $|\Delta_1 - \Delta_2| \ll \lambda$.

Очевидно, в интерференционных экспериментах выполняется условие $a \ll s \ll z$, $|\Delta_1 - \Delta_2| \approx as/z$. Следовательно, источник можно считать точечным при $as/z \ll \lambda$, $\Rightarrow r_{\text{ког}} = \lambda z/a$: длина когерентности увеличивается при увеличении z (в этом случае сферические волны от щелей сближаются).

Для Солнца $z = 150$ млн. км., $a = 0.7$ млн. км. Считая $\lambda = 5000\text{\AA}$, получим: $r_{\text{ког}} = 10^{-4}$ м. Для рассеянного солнечного света можно считать $a \approx z$, тогда $r_{\text{ког}} \approx 10^{-6}$ м.

Для лазера свет может быть когерентным по всему поперечному сечению пучка. Для получения крупных голограмм используются лазеры с сечением пучка порядка 1 м.

Длина когерентности определяется и шириной спектра излучателя: $r_{\text{ког}} = 2\pi c/\Delta\omega \Rightarrow$ чем уже спектр, тем большей будет длина когерентности и время когерентности. Так, для лазеров длина когерентности может достигать нескольких километров.

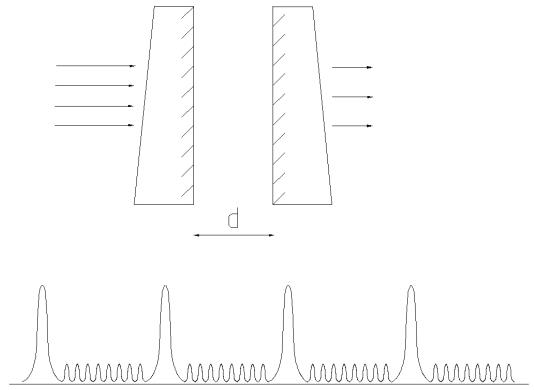
Многолучевая интерференция

Для исследования тонкой структуры спектра необходимы спектральные приборы с высоким разрешением. Одним из таких приборов является интерферометр Фабри–Перо (ИФП), состоящий из двух клиновидных пластин с параллельными внутренними сторонами, покрытыми светоотражающим слоем (например, алюминием). Пространство между пластинами может быть заполнено инертным газом.

Для изучения входного излучения снимаются последовательно интерференционные картины (представляющие собой кольца), полученные посредством изменения расстояния между пластинами, либо изменения давления в пространстве между ними. Благодаря значительному количеству интерферирующих лучей (десятки тысяч), ИФП дает очень резкую интерференционную картину.

Картина представляет собой резкие главные максимумы, между которыми находится $N - 1$ побочный максимум (N – количество интерферирующих лучей). Чем большим будет N , тем меньшей будет интенсивность побочных максимумов и тем уже будут главные максимумы.

Резкостью интерферометра называют величину $\mathfrak{F} = 2\pi/\varepsilon$, где ε – **полуширина** главного максимума (ширина на уровне $I = 0.5I_0$), π – расстояние между главными максимумами. При известном коэффициенте отражения



ИФП, R , резкость вычисляется по формуле $\mathfrak{F} = \frac{\pi}{1 - R}$.

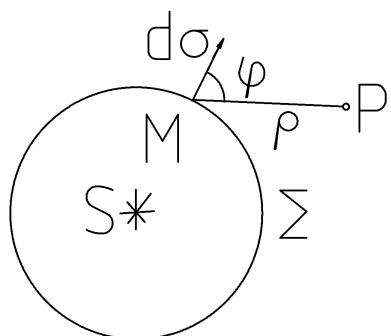
Рассмотрим интерференцию трех лучей. В точке 0 разности фаз лучей относительно луча B , $\Delta_A = \Delta_C = 2\pi$, эта точка — нулевой главный максимум. В точках -1 и $+1$ $\Delta_A = 0, 4\pi$, $\Delta_C = 4\pi, 0$ — точки первого главного максимума. В точках ± 0.5 $\Delta_A = \pi/2, 3\pi/2$, $\Delta_C = 3\pi/2, \pi/2$, $\Delta = \Delta_A + \Delta_C = 2\pi$ — максимум интерференции лучей A и C , луч B несколько уменьшает результирующую яркость, в результате чего в данных точках наблюдаются побочные максимумы.

Если рассматривать интерференцию N источников, между главными максимумами будет наблюдаться $N - 1$ побочный с разностью фаз $\Delta = 2\pi/N$, $n = \overline{1, N - 1}$. Побочные максимумы образованы попарной интерференцией источников, поэтому, естественно, что при увеличении N будет уменьшаться яркость побочных максимумов по сравнению с главными. Интенсивность главных максимумов пропорциональна N^2 , ширина — обратно пропорциональна N .

49 Явление дифракции

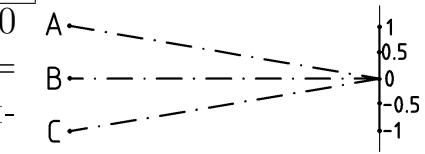
Принцип Гюйгенса–Френеля

Дифракция — явление нарушения прямолинейности распространения света (иногда используют такое определение: явление огибания световыми волнами препятствий). Положение волнового фронта в классической оптике определяется **принципом Гюйгенса**: *каждая точка фронта волны является источником вторичных волн, положение волнового фронта в любой момент времени определяется огибающей вторичных волн*.



Френель дополнил принцип Гюйгенса. **Принцип Гюйгенса–Френеля** — *вторичные волны интерферируют между собой, световое поле является результатом интерференции элементарных вторичных волн, испущенных каждым элементом волновой поверхности*.

Рассмотрим поверхность Σ , окружающую источник света, и некоторую точку M на этой поверхности. Будем считать элемент $d\sigma$ вокруг точки M источником света. Предположим, что испускаемые им волны — монохроматические, $E = \frac{1}{2}\mathcal{E} \exp(i\omega t)$. Тогда суммарная интенсивность в некоторой точке P определяется **интегралом Гюйгенса–**



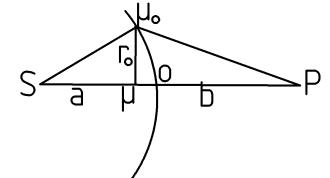
Френеля:

$$\mathcal{E}(P) = \int_{\Sigma} \mathcal{E}(M) \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} K(\varphi) d\sigma,$$

где $\rho = MP$, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – волновой вектор, $K(\varphi)$ – «коэффициент наклона», учитывающий зависимость результирующего поля от угла φ . Интеграл Гюйгенса–Френеля позволяет учесть фазы пришедших в точку P волн и рассчитать итоговую интерференционную картину.

Зоны Френеля

Выделим на волновой поверхности (см. рис.), имеющей вид сферы с центром в точке S , кольцевые зоны так, чтобы расстояния от границ этих зон до точки наблюдения изменились на $\lambda/2$: $M_0P = OP + \lambda/2, \dots, M_nP = M_{n-1}P + \lambda/2$.



Такие кольцевые зоны называются **зонами Френеля**.

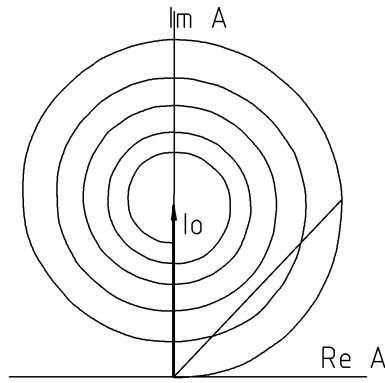
Каждую зону Френеля можно рассматривать как источник двух волн, имеющих определенную фазу: $r_0^2 = a^2 - (a - x)^2$, $r_0^2 = (b + \lambda/2)^2 - (b + x)^2$, $\Rightarrow 2ax = b\lambda - 2bx + (\lambda/2)^2$. Обычно $a, b \gg \lambda, x$, поэтому

$$x = \frac{b\lambda}{2(a+b)}, \quad r_0 \approx \sqrt{2ax}, \quad \boxed{r_0 = \sqrt{\frac{\lambda ab}{a+b}}}.$$

$$r_n = \sqrt{(n+1)\frac{\lambda ab}{a+b}} = r_0\sqrt{n+1}, \quad \boxed{S_n = \pi(r_n^2 - r_{n-1}^2) = \pi r_0^2 = \text{const}}.$$

Число открытых зон Френеля называется **числом Френеля**. Для определения амплитуды и фазы колебания, получающегося путем сложения нескольких других колебаний, используются **векторные диаграммы** в комплексной фазовой плоскости $\Re A, \Im A$. Фаза волны $\varphi = \arctg \frac{\Im A}{\Re A} = \arctg(y/x)$, амплитуда $|A| = \sqrt{\Re^2 A + \Im^2 A} = \sqrt{x^2 + y^2}$, где x, y – координаты искомой точки на диаграмме.

Для анализа **дифракции Френеля** (дифракция на малых отверстиях или препятствиях) используется **спираль Френеля**: все зоны разбиваются на множество подзон с одинаковым сдвигом фаз (в идеале – на бесконечное количество подзон). Интерференционная картина отображается на векторной диаграмме в виде спирали (см. рис.). Для получения значения интенсивности излучения, полученного в результате дифракции на N открытых зонах, проводят вектор из начала координат фазовой диаграммы в точку на спирали Френеля, отображающую данное количество зон.



При дифракции на отверстии максимум интенсивности наблюдается при открытой нулевой зоне ($I \lesssim 4I_0$), минимум – при открытых нулевой и первой зоне ($I \gtrsim 0$). Для получения интенсивности в случае дифракции на экране, искомый вектор нужно проводить из точки I_0 , соответствующей бесконечному числу открытых зон Френеля. В этом случае наибольшей интенсивности ($I = I_0$) соответствует отсутствие экрана. При открытой первой зоне $I \lesssim I_0$. Итоговая интенсивность будет равна нулю только при полном экранировании падающего излучения, в остальных случаях в центре дифракционной картины всегда будет наблюдаться главный максимум (в отличие от дифракции на отверстии, где в случае четного количества открытых зон в центре картины наблюдается минимум).

Зонные пластиинки

Зонная пластиинка представляет собой пластинку с затемненными участками, соответствующими четным или нечетным номерам зон Френеля. Зонная пластиинка работает как линза, перераспределяя излучение в пространстве. Внесение зонной пластиинки между точками S и P многократно увеличивает интенсивность излучения в P . Зонная пластиинка обладает несколькими фокусами. Действительно, $r_n = \sqrt{(n+1)\lambda F}$, $F = r_n^2 / ([n+1]\lambda)$ (т.к. $F = ab/(a+b)$).

Помимо зонных, распространены также **фазовые пластиинки**, представляющие собой пластиинки из прозрачного материала, на поверхности которой нанесены кольцевые утолщения так, чтобы излучение от четных и нечетных зон Френеля отличалось по фазе на $\lambda/2$. Фазовая пластиинка имеет большую светопроницаемость по сравнению с зонной.

Дифракция на краю полубесконечного экрана. Спираль Корню

Разобьем плоскую волновую поверхность, падающую на экран, на параллельные краю экрана зоны. Ширина n -й зоны $d_n^2 = (l+n\lambda/2)^2 - l^2 \approx nl\lambda + (n\lambda/2)^2$, $\Rightarrow d_n \approx \sqrt{nl\lambda}$, где l – расстояние от края экрана до внутренней границы зоны. Площадь зон $S_n = (d_{n+1} - d_n)L \approx L/2\sqrt{\lambda l/n}$, где L – длина края экрана. Т.о., в данном случае площадь зон убывает пропорционально $n^{-1/2}$.

Если отодвигать экран назад, будут открываться новые зоны Френеля, симметричные относительно начала координат на векторной диаграмме. В данном

случае векторная диаграмма носит название **спирали Корню**. Правая ветвь спирали Корню позволяет рассчитать результирующую интенсивность при дифракции на краю экрана.

Теория дифракции Кирхгофа. Приближения Френеля и Фраунгофера

Дифракционной длиной светового пучка, Z_d , называют расстояние, на котором отверстие совпадает с нулевой зоной Френеля. Область расстояний $Z \ll Z_d$ называют **ближней зоной**, а $Z \gg Z_d$ – **дальней зоной**. В дальней зоне интенсивность пучка на оси значительно меньше интенсивности исходной волны, наблюдается явление дифракционного расширения светового пучка.

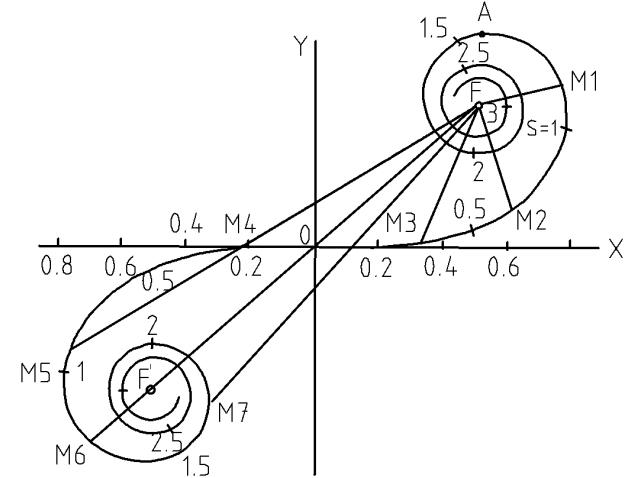
$Z - d = r^2/\lambda$; количество зон Френеля, помещающихся в отверстии, $N - F = r^2/(\lambda Z) = Z_d/Z$, \Rightarrow в ближней зоне $N_F \gg 1$, а в дальней $N_F \lesssim 0$.

Естественно допустить, что положение границы светового пучка определяется из условия $\Delta = \lambda/2$, тогда, т.к. $\Delta \approx \sin(\theta_d/2)$, получим выражение для **угла расходимости светового пучка**: $\boxed{\theta_d = \lambda/d}$, а диаметр пучка можно определить по выражению $d(Z) = \lambda Z/d_0$.

Общий метод решения дифракционной задачи предложил Кирхгоф. Из волнового уравнения, $\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$, получим: $\boxed{\Delta \mathcal{E} + k^2 \mathcal{E} = 0}$ (**уравнение Гельмгольца**). Его решения: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp(-i\vec{k}\vec{r})$ и $\mathcal{E} = A \exp(-i\vec{k}\vec{r})/r$, соответствующие плоской и сферической волнам соответственно.

Теория Кирхгофа рассматривает дифракцию сферической волны. Границные условия Кирхгофа: на теневой стороне экранов $\mathcal{E} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}} = 0$ (\vec{n} – нормаль к волновой поверхности); в пределах отверстия \mathcal{E} и $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}}$ таковы, как если бы экраны отсутствовали. Решение задачи Кирхгофа называют **интегралом Кирхгофа–Гельмгольца**:

$$\mathcal{E}(P) = \int_{\Sigma} \mathcal{E}(M) \frac{\exp(-i\vec{k}\vec{\rho})}{\rho} K(\varphi) d\sigma,$$



где интегрирование ведется по поверхности волнового фронта, $K(\varphi) = \frac{i}{\lambda}(1 + \cos \varphi)/2$ имеет отличную от ядра интеграла Гюйгенса–Френеля форму.

Теория Кирхгофа основывается на **теореме Кирхгофа–Гельмгольца**:

$$\mathcal{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}} - \mathcal{E} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \right) dS, \quad \text{где } G = \frac{\exp(-ik\vec{\rho})}{\rho} - \text{функция Грина.}$$

Приближения теории Кирхгофа для ближней и дальней зоны называют приближениями Френеля и Фраунгофера, соответственно.

Приближение Френеля. В случае ближней зоны $K(\varphi) \approx i/\lambda$, \Rightarrow

$$\mathcal{E}(P) = \frac{i}{\lambda} \int_{\Sigma} \mathcal{E}(M) \frac{\exp(-ik\vec{\rho})}{\rho} d\sigma.$$

На практике расчеты по этой формуле сводятся к нахождению интегралов $C(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos(\pi t^2/2) dt$ и $S(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin(\pi t^2/2) dt$ при помощи спирали Корню. $\rho^2(\alpha_1, \alpha_2) = (C(\alpha_1) - C(\alpha_2))^2 + (S(\alpha_1) + S(\alpha_2))^2$.

Приближение Фраунгофера. Для дальней зоны $K(\varphi) \approx i/\lambda$, $d\sigma = dx dy$, $\rho = \sqrt{Z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Если $Z \gg x, y, x_0, y_0$, то $P = (x_0, y_0, Z)$, $M = (x, y, 0)$, $\rho = b + \frac{x^2+y^2}{2b} - \frac{xx_0+yy_0}{b}$. Пусть $\sin \theta = x_0/b$, тогда

$$\mathcal{E}(\theta, Z) = \frac{i+1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp\left(-\frac{ikx^2}{2b}\right) \exp(ikx \sin \theta) dx.$$

При $kd^2/(2b) \ll 1$ (d – начальный диаметр пучка),

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{i+1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp(ikx \sin \theta) dx. \quad (49.1)$$

Данное предположение справедливо, т.к. $Z \gg Z_d$, где $Z_d = kd^2/r$ – дифракционная длина пучка.

Т.о., в дальней зоне формируется устойчивое угловое распределение интенсивности, не меняющееся с расстоянием.

Дифракция в дальней зоне как Фурье-образ объекта

Интеграл 49.1 является пространственным интегралом Фурье, где $k \sin \theta$ играет роль пространственной частоты. Т.к. $k \sin \theta = k_x$ — поперечная компонента волнового вектора, между k_x и θ имеется взаимно однозначное соответствие:

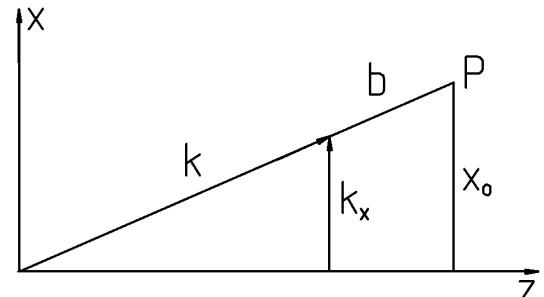
$$\mathcal{E}(P) = \frac{i+1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \mathcal{E}_0(k_x), \quad \mathcal{E}_0(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0(x) e^{ik_x x} dx.$$

Интенсивность в дальней зоне:

$$I(P) = \frac{\text{const}}{8\pi} |\mathcal{E}(P)|^2 = \frac{\text{const}}{8\pi} \frac{1}{\lambda b} S_0(k_x),$$

где $S_0(k_x) = |\mathcal{E}_0(k_x)|^2$ — угловой спектр излучения.

Т.о., дифракция Фраунгофера является пространственным разложением ограниченного светового пучка на плоские волны.



Дифракция на щели.

$$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & |x| \leq d/2, \\ 0, & |x| \geq d/2. \end{cases}$$

Введем функцию **интегрального синуса** $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$. Тогда

$$I(\theta) = I_{max} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right), \quad I_{max} = I_0 \frac{d^2}{\lambda b}.$$

Дифракционная расходимость пучка $\Delta\theta = \lambda/d$.

Дифракционная картина представляет собой резкий главный максимум в центре, сопровождающийся побочными максимумами с быстро падающей амплитудой.

Дифракция на прямоугольном отверстии. Дифракционная картина представляет собой суперпозицию дифракционных картин от двух расположенных поперек щелей с шуринаами d_1 и d_2 . Помимо угла θ введем угол ψ — угол дифракции относительно стороны d_2 .

Итоговая картина распределения интенсивности описывается выражением:

$$I(\theta, \psi) = I_{max} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi d_1 \sin \theta}{\lambda} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi d_2 \sin \psi}{\lambda} \right), \quad I_{max} = I_0 \frac{d_1 d_2}{\lambda b}.$$

Дифракция на круглом отверстии. В данном случае наблюдается кольцевая дифракционная картина с угловым распределением интенсивности:

$$I(\theta) = I_{max} \left(\frac{J_1(2\pi\theta k/\lambda)}{2\pi\theta k/\lambda} \right)^2,$$

где J_1 – **функция Бесселя первого порядка**, $I_{max} = I_0 \frac{\pi R^2}{\lambda b}$, R – радиус отверстия, I_0 – как и ранее, интенсивность падающего излучения.

Наблюдающуюся дифракционную картину называют **картиной Эйри**. Угловая ширина главного максимума $\Delta\theta_0 = 1.22\lambda/R$ является пределом углового разрешения изображений при наблюдении в телескоп или микроскоп.

Дифракционные решетки. Акустооптические модуляторы

Дифракционная решетка представляет собой прозрачную пластинку, на которую нанесены непрозрачные штрихи (пропускающая решетка), либо металлическую пластинку, на которой вырезаны клиновидные углубления (отражающая решетка). Перечисленные виды решеток относятся к *амплитудным дифракционным решеткам*. Основными характеристиками решеток являются **период d** и **разрешающая способность $R = \lambda/d\lambda$** , зависящая от количества штрихов решетки и некоторых других характеристик.

При многолучевой интерференции прошедшего решетку излучения образуется дифракционная картина, представляющая собой набор главных максимумов, разделенных побочными максимумами. При большом количестве штрихов решетки можно считать, что интенсивность побочных максимумов близка к нулю.

Главные максимумы наблюдаются при условии $d(\sin \theta - \sin \psi) = m\lambda$, где θ – угол дифракции, ψ – угол падения, m – порядок дифракции.

В *фазовых решетках* штрихи формируют так, чтобы образовать зоны с постоянной разностью фаз.

Дифракция на акустических волнах связана с тем, что под воздействием стоячих ультразвуковых волн в прозрачной среде образуется пространственная фазовая решетка. Если ультразвуковые волны не являются стоячими, дифракционная картина искажается **эффектом Допплера**: частота дифрагированного излучения равна $\omega_m = \omega \pm m\Omega$, где ω – частота падающего излучения, Ω – частота звука.

Для низкочастотного звука наблюдается **дифракция Рамана–Ната**: $\sin \theta = m\lambda/\Lambda$, где Λ – длина волны звука.

Дифракция на ультразвуке называется **дифракцией Брэгга**. Она происходит, если свет падает на прозрачную пластинку под углом **Брэгга** $\theta_B =$

$\arcsin\left(\frac{\lambda}{2\Lambda}\right)$. Существует предельная звуковая частота, выше которой брэгговская дифракция невозможна: $\Omega_{lim} = 4\pi c_{\text{звук}}/\lambda$.

Дифракция света на акустических волнах позволяет определять характеристики звуковых полей, не внося в них изменения. Этими характеристиками являются, например, модули упругости, упругооптические свойства материалов, поглощение и скорость звука. Кроме того, при помощи акустооптических модуляторов возможна передача полезных многомодовых сигналов при помощи оптических волокон.

50 Дифракция в оптических приборах и спектральный анализ

Спектральный анализ

Спектральный анализ позволяет вычислить такие характеристики веществ, как химический состав, концентрацию растворов, температуру и т.д.

Спектральный анализ делится на два вида: анализ излученного веществом света (эмиссионный анализ) и анализ поглощенного света, испущенного широкополосным источником (абсорбционный анализ). В обоих случаях используются такие приборы, как дифракционная решетка, интерферометр Фабри–Перо, призма.

Помимо того, существует спектральный анализ оптических изображений (**голография**) — запись на толстую фотопластинку пространственного Фурье–спектра объекта.

В подавляющем большинстве случаев спектроскопия основана на разложении исходного излучения в пространственный спектр при помощи различных спектральных приборов.

Спектральные приборы и их характеристики

Зависимость коэффициента поглощения и преломления вещества от длины волны падающего излучения несет информацию о структуре и свойствах атомов и молекул среды. Дисперсию вещества можно измерить методом Ньютона (метод скрещенных призм).

Дисперсия. $D_* = \frac{dn}{d\lambda}$. Обычно у веществ $D_* < 0$, однако, у некоторых веществ наблюдается **аномальная дисперсия**, когда $D_* > 0$.

Фазовая скорость света

$$u = \frac{d\omega}{dl} = \frac{d(2\pi\nu)}{d(2\pi n\nu/c)} = \frac{c}{n + \nu \frac{dn}{d\nu}} = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} D_*},$$

где $v = c/n$ – **групповая скорость** света.

Т.о., при нормальной дисперсии $u < v$, а при аномальной $u > v$. За счет зависимости фазовой скорости света от его частоты и возникает способность призм разлагать спектр в пространстве.

Дифракционная решетка осуществляет разложение света в спектр за счет явления многолучевой интерференции дифрагирующих лучей. Аналогично возникает интерференционная картина в интерферометрах Фабри–Перо.

Аппаратная функция, разрешающая способность. Аппаратной функцией дифракционного прибора называется его реакция на идеально монохромное излучение (δ -функцию), поданное на вход прибора. Идеальной является аппаратная функция в форме δ -функции, однако, за счет конечного числа интерферирующих лучей и неидеальности дифракционных приборов она имеет вид, близкий к функции интегрального синуса.

Разрешающая способность (разрешение) спектрального прибора определяется отношением $R = \lambda/\delta\lambda$, где $\delta\lambda$ – разность длин волн двух соседних линий в данном участке спектра, которые способен разрешить раздельно спектральный прибор. Для дифракционной решетки $R = mN$, где m – порядок дифракции, N – количество штрихов, нанесенных на решетку.

Дисперсия. Областью дисперсии, G , (свободным спектральным интервалом, FSR) называется ширина спектра в данном порядке дифракции, на который не накладываются соседние порядки. Для решетки $G = \lambda/m$.

Угловой дисперсией называется величина $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$, где $\delta\varphi$ – расстояние между двумя спектральными линиями с разностями длин волн $\delta\lambda$. Из уравнения решетки получим: $d \cos \varphi \delta\varphi = m \delta\lambda \Rightarrow D_\varphi = \frac{m}{d \cos \varphi}$. При малых углах дифракции $D_\varphi \approx m/d$.

Линейной дисперсией называют величину $D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda}$, где δl – расстояние между линиями на светоприемнике спектрального прибора. D_l зависит от фокусного расстояния F объектива спектрального прибора: $D_l = FD_\varphi \approx Fm/d$.

Дифракционная теория формирования изображения

Данная теория была разработана Аббе и поэтому, обычно, носит его имя.

Согласно теории Аббе, процесс формирования изображения линзой заключается в следующем. В области от самой линзы до ее задней фокальной поверхности происходит Фурье-анализ волнового поля, испущенного объектом. В области между передней фокальной поверхностью линзы и плоскостью изображения происходит Фурье-синтез изображения.

Вводя различные щели и экраны в область передней фокальной плоскости линзы можно изменять вид изображения за счет коррекции его пространственного Фурье-спектра.

Оптические приборы рассматриваются как дифракционные, т.е. их корпуса играют роль дифракционных приборов (например, дифракция излучения на входном зрачке телескопа ограничивает его разрешающую способность). Сами же оптические приборы выполняют операции прямого и обратного Фурье-преобразования излучения, проходящего сквозь них.

Роль дифракции в приборах: линзе, телескопе, микроскопе

В формировании изображения большую роль играет число зон Френеля $N_F = r^2/(\lambda Z)$, открываемых прибором. При $N_F \gg 1$ дифракцией можно пренебречь. В данном случае будет справедливо рассматривать оптические явления, используя геометрическую оптику. При $N_F > 1$ наблюдается дифракция Френеля, а при $N_F \leq 1$ – дифракция Фраунгофера.

При построении изображения в простой линзе $N_F \gg 1$, поэтому в данном случае можно не учитывать дифракционные явления. Однако, при получении изображения в телескопах и микроскопах их необходимо учитывать.

При очень малых угловых размерах объекта наблюдается дифракция Фраунгофера, изображение объекта имеет вид дифракционного кружка Эйри. Угловой диаметр главного максимума, $\varphi_{min} = 1.22\lambda/D$, где D – диаметр входного зрачка. φ_{min} ограничивает разрешение телескопа, являясь его предельным разрешением.

При наблюдении в микроскоп наблюдается дифракция Френеля. Из уравнения $d \sin \theta = m\lambda$ получим минимальный линейный размер, разрешаемый микроскопом: $d_{min} = \lambda$.

51 Дисперсия диэлектрической проницаемости

Физический смысл комплексной диэлектрической проницаемости

Уравнения Максвелла для среды имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Удобно ввести комплексную амплитуду для напряженностей электрического и магнитного поля, электрической индукции и поляризованности, обозначив ее соответственно \mathcal{E} , \mathfrak{H} , \mathfrak{D} и \mathfrak{P} . Тогда, например, напряженность ЭП будет выражаться через комплексную амплитуду так: $\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}} \exp(i[\omega t - \vec{k}\vec{r}])$, где \vec{k} – волновой вектор. Аналогично записутся выражения для остальных величин. В этом случае уравнения Максвелла также будут записываться через комплексные амплитуды. Волновое уравнение примет вид: $\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}] + \omega^2 \vec{\mathfrak{D}} = 0$.

В изотропных средах $\vec{E} \parallel \vec{P} \parallel \vec{D}$, следовательно, их комплексные амплитуды также будут параллельны друг другу.

Для выражения электрической индукции через напряженность ЭП необходимо ввести **комплексную диэлектрическую проницаемость** $\tilde{\varepsilon}(\omega)$: $\vec{\mathfrak{D}} = \tilde{\varepsilon}(\omega) \vec{\mathcal{E}}$. Кроме того, справедливо соотношение $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) - i\varkappa(\omega)$, где $\varkappa(\omega)$ – коэффициент поглощения.

Т.к. $\vec{k} \times \vec{\mathfrak{D}} = 0$, получим:

$$-k^2 \vec{\mathcal{E}} + \omega^2 \tilde{\varepsilon}(\omega) \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad \Rightarrow \quad k = \omega \tilde{n}(\omega),$$

где $\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}(\omega)}$ – комплексный показатель преломления среды.

Формула Крамерса–Кронига

Соотношения Крамерса–Кронига являются дисперсионными соотношениями, связывающими показатель преломления среды $n(\omega)$ с коэффициентом поглощения $\varkappa(\omega)$. **Прямое соотношение Крамерса–Кронига:**

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \iint_0^\infty \frac{\varkappa(x) dx^2}{x^2 - \omega^2} = n(0) + \frac{\omega^2}{\pi} \iint_0^\infty \frac{\varkappa(x) dx^2}{x^2(x^2 - \omega^2)}.$$

Обратное соотношение Крамерса–Кронига:

$$\varkappa(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{n(x) dx}{x^2 - \omega^2}.$$

Физические соотношения Крамерса–Кронига выражают существование жесткой связи дисперсии световой волны и ее поглощения. Они справедливы для большинства немагнитных сред со слабой пространственной дисперсией.

Микроскопическая картина распространения света в веществе. Классическая электронная теория дисперсии

Нелокальность отклика поляризованности среды на изменение внешнего электрического поля приводит к пространственной дисперсии (зависимости фазовой скорости света от его частоты), а инерционность этого отклика приводит к временной дисперсии.

Согласно классической осцилляторной модели атома, под воздействием внешнего электрического поля электронные орбиты атомов вытягиваются, вещество поляризуется. Классическое уравнение колебания гармонического осциллятора имеет вид: $\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}\vec{E}'$, где r – амплитуда колебания электрона, $2\gamma = g/m$, g – коэффициент затухания, m – масса электрона, e – его заряд, \vec{E}' – напряженность внешнего электрического поля. Если пренебречь различием между полем волны в вакууме, E , и межатомным внешним полем, E' , получим:

$$\ddot{r} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E},$$

где ω – частота падающей волны. Таким образом, атом поляризуется, приобретая дипольный момент $\vec{p} = e\vec{r} = \beta\vec{E}$, где β – **поляризуемость атома**.

Если среда состоит из N атомов, ее поляризованность $\vec{P} = N\vec{p}$, а индукция $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$, где

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} E.$$

Вдали от собственной частоты ω_0 наблюдается нормальная дисперсия, мнимой частью в выражении для диэлектрической проницательности можно пренебречь:

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E.$$

Формула для n такого вида впервые была получена Зельмайером в механической теории Эфира.

Для сложных атомов необходимо суммировать действие всех линейных осцилляторов, моделирующих поведение данного атома. При этом возникнет весовой коэффициент, обозначающий вклад i -го осциллятора в результирующее

колебание — **сила осциллятора**. Для каждого осциллятора вблизи его собственной частоты будет наблюдаться скачок дисперсии (область аномальной дисперсии), когда при увеличении частоты внешнего возмущения показатель преломления среды сначала быстро возрастает, а затем скачкообразно спадает.

Если учесть взаимодействие молекул в веществе, необходимо заменить \vec{E}' на $\vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}$. В этом случае получим **формулу Лорентца–Лоренца**:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Из этой формулы следует, что при неизменной частоте ω

$$r \equiv \frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \text{const},$$

т.к. концентрация N молекул пропорциональна плотности вещества. Величина r называется **удельной рефракцией**. Т.о., согласно формуле Лорентца–Лоренца, *удельная рефракция вещества не должна изменяться при изменении его плотности*.

Фазовая и групповая скорости света

Фазовая скорость волны, $v = \omega/k$, является скоростью распространения переднего фронта волны. **Групповая скорость**, $u = \frac{d\omega}{dk}$, является скоростью распространения волнового пакета, как единого целого.

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Т.к. $\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dl}$, $\lambda = 2\pi/k$, получим: $\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$, $\Rightarrow \frac{dv}{dk} = -\frac{dv}{d\lambda} \frac{\lambda}{k}$.
Получим **формулу Рэлея**:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad \text{или} \quad u = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}},$$

которая связывает фазовую и групповую скорости света.

За счет дисперсии происходит «расплывание» волновых пакетов, имеющих разные частоты: пакеты с большими групповыми скоростями «обгоняют» пакеты с меньшими скоростями. При выходе такого сигнала из диспергирующей среды наблюдается пространственное разделение волновых пакетов, имеющих разные частоты.

Поглощение света. Закон Бугера–Ламберта–Бэра

Пусть S – поперечное сечение светового пучка, проходящего через некоторую среду. При прохождении элементарного участка dl за счет поглощения (абсорбции) в среде интенсивность излучения в пучке уменьшится на величину $dI = -I_0 \delta dl$, где I_0 – начальная интенсивность, δ – коэффициент поглощения. Интегрируя полученное выражение, получим **закон Бугера–Ламберта**: $I(l) = I_0 \exp(-\delta l)$.

Бэр заметил, что коэффициент поглощения в растворах пропорционален концентрации раствора: $\delta = \sigma n$, где σ – сечение поглощения. Поглощение в жидкостях происходит согласно **закону Бугера–Ламберта–Бэра**:

$$I(l) = I_0 \exp(-\sigma nl).$$

Особенности распространения света в металлах

Оптические свойства металлов определяются, в основном, наличием в них свободных электронов, у которых $\omega_0 = 0$, $\gamma = 0$. Тогда получим: $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}$, $\Rightarrow \boxed{\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, где $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m}}$ – **плазменная частота**.

Для свободных электронов плазменная частота соответствует обычно ультрафиолетовому диапазону, следовательно, в диапазоне видимого света $\varepsilon < 0$, и показатель преломления является чисто мнимым числом.

Т.к. коэффициент отражения $R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$, где $n_{1,2}$ – комплексные показатели преломления сред, то для границы воздух – металл: $n_1 = 1$, $n_2 = in''_2$ (n'' – действительное число), $\Rightarrow R = 1$, т.е. глубоко внутрь металлов волны с частотами $\omega < \omega_p$ не проникают.

Благодаря тому, что для различных металлов плазменные частоты различаются, металлы, у которых ω_p находится в диапазоне видимого света, за счет частичного поглощения света принимают ту или иную окраску.

52 Поляризация света, граничные эффекты

Математическое описание состояния поляризации. Поляризация естественного света

Линейно (плоско-) поляризованная волна математически описывается уравнением $\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}z)$, т.е. для нее плоскость колебаний вектора \vec{E} в

пространстве не изменяется. **Плоскостью поляризации** называют плоскость колебаний вектора \vec{H} .

В естественном свете присутствует огромное число волновых пакетов с различно ориентированными плоскостями поляризации. При прохождении через некоторые среды естественный свет может частично поляризоваться (т.е. в нем начинают преобладать пакеты с одинаковой плоскостью поляризации). **Степенью поляризации** называют величину $P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$, где I_{max} и I_{min} — максимальная и минимальная интенсивности излучения, разложенного по двум взаимно перпендикулярным плоскостям поляризации. Степень поляризации естественного света равна нулю.

Электромагнитное колебание можно представить в виде

$$\vec{E}(t, z) = i\vec{E}_x \cos(\omega t - \vec{k}\vec{z} + \varphi_x) + j\vec{E}_y \cos(\omega t - \vec{k}\vec{z} + \varphi_y).$$

Тогда, в зависимости от соотношения φ_x и φ_y , а также E_x и E_y возможны следующие **виды поляризации**:

- $\varphi_x = \varphi_y$ — линейная поляризация;
- $\varphi_x - \varphi_y = \pm\pi/2$ — эллиптическая поляризация;
- $\varphi_x - \varphi_y$ хаотически меняется — естественный свет ($P = 0$).

Для получения поляризованного света используют **поляризаторы**, а для определения вида поляризации — **анализаторы** (обычно это те же самые устройства, что и поляризаторы).

При прохождении плоскополяризованного света через анализатор, его интенсивность меняется по **закону Малюса**:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где α — угол между плоскостями поляризации света и анализатора.

Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Формулы Френеля

Рассмотрим падение электромагнитной волны на плоскость раздела двух изотропных диэлектриков. Разложим напряженность ЭП падающей волны на две составляющие: $E_{||}$, лежащую в плоскости падения волны (плоскость, проходящая через падающий луч и перпендикуляр к границе раздела сред), и E_{\perp} , перпендикулярную плоскости падения.

Обозначим комплексные амплитуды падающей, отраженной и преломленной волны, соответственно, $A_{||}$, A_{\perp} ; $A'_{||}$, A'_{\perp} ; $A''_{||}$, A''_{\perp} ; угол падения: θ_1 , угол

преломления: θ_2 . **Формулы Френеля** выражают амплитуды отраженной и преломленной волн через амплитуду падающей волны и угол падения:

$$\begin{aligned} A'_\parallel &= A_\parallel \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}; & A'_\perp &= -A_\perp \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}; \\ A''_\parallel &= A_\parallel \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}; & A''_\perp &= A_\perp \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

В данном случае также вводят **коэффициенты отражения и преломления**: $r = A'/A$, $t = A''/A$.

Если обозначить показатели преломления первой и второй сред, соответственно, n_1 и n_2 , углы падения и преломления окажутся связаны между собой **законом Снеллиуса**: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.

Поляризация отраженной и преломленной волн. Угол Брюстера

При попадании на границу двух сред, естественный свет испытывает преломление и отражение. При этом отраженный свет является частично поляризованным в плоскости падения, а преломленный — в перпендикулярной плоскости.

Угол, при котором степени поляризации преломленного и отраженного лучей оказываются максимальными, называют **углом Брюстера**, $\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = n_1/n_2$. В случае падения излучения под углом Брюстера, отраженный луч оказывается полностью поляризованным в плоскости падения, а преломленный — в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Отраженный и преломленный лучи при этом перпендикулярны друг другу.

Распределение света в анизотропных средах. Двойное лучепреломление

В анизотропных средах (кристаллы) происходит двойное лучепреломление: наблюдаются «обыкновенный» и «необыкновенный» лучи со взаимно перпендикулярной плоскостью поляризации. Для обоих типов лучей показатель преломления анизотропного вещества окажется различным (n_o для обыкновенного и n_e для необыкновенного лучей).

Для таких веществ вводятся понятия тензоров оптической восприимчивости и диэлектрической проницаемости. Обозначим тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$. В главной системе координат он примет диагональный вид, с ненулевыми элементами ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{zz} .

В зависимости от значений элементов тензора $\hat{\varepsilon}$ в главной системе координат, выделяют следующие типы кристаллов:

- **изотропные:** $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon$, $n = \sqrt{\varepsilon}$;
- **одноосные:** $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$, $n_o = \sqrt{\varepsilon_{xx}} = \sqrt{\varepsilon_{yy}}$, $n_e = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$;
- **двуосные:** $\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$, существует три разных показателя преломления;
- **положительные:** $n_o < n_e$;
- **отрицательные:** $n_o > n_e$.

Главной плоскостью кристалла называется плоскость, в которой лежат волновой вектор падающей волны и оптическая ось кристалла \vec{z}_0 . В обыкновенной волне, (o), поляризация перпендикулярна главной плоскости, а у необыкновенной, (e) — параллельна ей.

Предположим, что волна распространяется в кристалле с направлением, не совпадающим ни с одной осью. Дисперсионное уравнение в комплексных амплитудах примет вид: $\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\mathfrak{D}} = 0$, или $(\vec{k} \vec{\mathcal{E}}) \vec{k} - k^2 \vec{\mathcal{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\mathfrak{D}} = 0$.

Для обыкновенного луча: $\vec{\mathfrak{D}} = n_o^2 \vec{\mathcal{E}}$, $\vec{k} \vec{\mathcal{E}} = 0$, $\Rightarrow v_o = c/n_o$ вне зависимости от направления луча в кристалле. Для необыкновенного луча: $\vec{k} \vec{\mathcal{E}} \neq 0$, следовательно, скорость будет лежать в диапазоне $(c/n_o, c/n_e)$.

Пусть $\vec{m} = \vec{k}/k$, где $k = \omega n/c$. Тогда $\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{n^2} \vec{\mathfrak{D}} = (\vec{m} \vec{\mathcal{E}}) \vec{m}$. Для одноосного кристалла получим: $\mathfrak{D}_x = n_o^2 \mathcal{E}_x$, $\mathfrak{D}_y = n_o^2 \mathcal{E}_y$, $\mathfrak{D}_z = n_e^2 \mathcal{E}_z$. \Rightarrow

$$\mathfrak{D}_{x,y} = \frac{(\vec{m} \vec{\mathcal{E}}) m_{x,y}}{n_o^{-2} - n^{-2}}, \quad \mathfrak{D}_z = \frac{(\vec{m} \vec{\mathcal{E}}) m_z}{n_e^{-2} - n^{-2}},$$

а т.к. $\vec{m} \vec{\mathfrak{D}} = 0$, получим **уравнение нормалей Френеля**:

$$\frac{m_x^2 + m_y^2}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{m_z^2}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}} = 0.$$

Это уравнение дает возможность получить значение величины n — показателя преломления необыкновенного луча для любого направления в кристалле, а также скорости его распространения $v = c/n$.

Пусть $\varphi = \angle(O\vec{Z}, \vec{k})$, тогда, т.к. $|\vec{m}| = 1$, получим: $m_z = \cos \varphi$, $m_x^2 + m_y^2 = \sin^2 \varphi$, \Rightarrow

$$\frac{\sin^2 \varphi}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{\cos^2 \varphi}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin^2 \varphi}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{n_o^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Последнее уравнение является *уравнением эллипсоида показателя преломления*. Его решение:

$$n(\varphi) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \varphi + n_o^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Для случая двойного лучепреломления закон Снеллиуса имеет вид:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2^{(o)} \sin \theta_2^{(o)} = n_2^{(e)} \sin \theta_2^{(e)}.$$

Для объяснения двойного лучепреломления в одноосном кристалле и нахождения направлений обыкновенного и необыкновенного лучей можно воспользоваться графическим методом Гюйгенса. Он заключается в графическом построении волновых поверхностей падающей волны и преломленных обыкновенной и необыкновенной волн в соответствии с принципом Гюйгенса.

Интерференция поляризованных волн

В случае сложения двух перпендикулярных колебаний, они не интерферируют между собой, следовательно, не могут интерферировать и обыкновенная и необыкновенная волны. Этот факт подтверждается опытами.

Опыт по интерференции поляризованных волн можно провести следующим образом. Между скрещенными поляризаторами устанавливают двулучепреломляющий кристалл. Выходная освещенность зависит от ориентации кристалла и фазового набега между обыкновенной и необыкновенной волнами. Фазовый набег зависит от длины волны. Разность хода двух волн: $\Delta = (n_o - n_e)d$, фазовый набег: $\Delta\varphi = 2\pi\Delta/\lambda_0$. Если убрать один из поляризаторов, интерференционная картина не возникнет. В данном опыте две волны, поляризованные перпендикулярно друг другу, интерферируют за счет того, что второй поляризатор выделяет из них составляющие, совпадающие по направлению.

Получение и анализ эллиптически поляризованного света

Для этих целей используют **фазовую пластинку** $\lambda/4$, дающую сдвиг фаз $\pi/2$ между обыкновенным и необыкновенным лучами. Фазовые пластиинки вырезают из двулучепреломляющих кристаллов в направлении, параллельном оптической оси.

Пластинку устанавливают так, чтобы оптическая ось пластиинки составляла угол $\pi/4$ с направлением поляризации падающей на нее волны. В результате свет, выходящий из пластиинки, имеет циркулярную поляризацию. В случае, когда угол между осью пластиинки и направлением поляризации падающего света не равен $\pi/4$, выходящая волна будет эллиптически поляризованной.

Четвертьволновой пластинкой можно и анализировать свет на предмет его циркулярной поляризации. Если скрестить четвертьволновую пластинку и поляризатор под углом $\pi/4$, то, в случае, если на пластинку попадает эллиптически поляризованное излучение, при определенном угле поворота системы через поляризатор не будет проходить свет. Если при вращении системы освещенность на выходе будет постоянной, на входе имеем естественный свет. Изменение выходной освещенности в процессе вращения свидетельствует о том, что входной сигнал поляризован линейно.

Анизотропия оптических устройств

Фотоупругость. При однородном растяжении или сжатии изотропного тела, оно приобретает оптические свойства одноосного кристалла. Разница показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в этом случае пропорциональна напряжению: $n_o - n_e \propto \sigma$. Явление фотоупругости используют для анализа напряжений в конструкциях на их моделях, сделанных из прозрачного изотропного вещества (стекла, плексигласа).

Эффект Керра. При помещении прозрачного изотропного диэлектрика (твердого, жидкого или газообразного) во внешнее ЭП, в нем возникает оптическая анизотропия. Разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн подчиняется **закону Керра**: $n_e - n_o = B\lambda_0 E^2$, где B – **постоянная Керра**, λ_0 – длина волны падающего излучения, E – напряженность внешнего ЭП. Для большинства веществ $B > 0$ и они подобны положительным одноосным кристаллам.

Эффект Коттона–Муттона. При помещении прозрачного диэлектрика во внешнее МП, в нем также возникает оптическая анизотропия: $n_e - n_o = C\lambda_0 H$.

Эффект Фарадея. Оптически неактивная среда принимает под действием внешнего магнитного поля способность вращать плоскость поляризации света, распространяющегося вдоль направления поля. Угол поворота φ плоскости поляризации пропорционален длине пути света в веществе, l , и напряженности, H МП: $\varphi = VHl$. Коэффициент пропорциональности V называется **постоянной Верде**.

53 Оптическое излучение

Классическая модель затухающего дипольного осциллятора

Уравнение затухающих вынужденных колебаний излучающей дипольной системы имеют вид $\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{\tau} \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}$, где τ – время затухания свободных колебаний электрона. ($X(t) = x_0 \exp(-t/(2\tau)) \cos \omega_0 t = A_0 \cos \omega_0 t$). Дипольный момент электрона $\vec{p} = \vec{r}e$, $\Rightarrow \ddot{\vec{p}} + \frac{1}{\tau} \dot{\vec{p}} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{e^2}{m} \vec{E}$. Решение: $\vec{E} = \frac{1}{r^3} \vec{r} \times [\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)]$.

Интенсивность излучения зависит от угла θ между излучением и перпендикуляром к плоскости колебаний: $I = A \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \theta$, $A = \frac{q^2 A_0^2}{8\pi c^3}$, где A_0 – амплитуда колебаний осциллятора.

Постоянную τ можно оценить, зная начальную энергию осциллятора, W , и мощность излучения, P : $\tau = W/P$. $W = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2$, $P = \int I d\sigma = \frac{1}{3c^3} e^2 A_0^2 \omega^4$, $\Rightarrow \tau = \frac{3mc^3}{2e^2 \omega^2} \sim 10^{-8}$ с. Эксперименты подтверждают такое значение времени затухания.

Лоренцева форма линии излучения

Согласно модели Лоренца, $\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} \vec{f} \vec{E}$, где \vec{f} – нормаль, характеризующая направление движения электрона. Решением этого уравнения является Лоренцева форма:

$$S_0(\omega) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{a_0^2/4}{\Gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2},$$

где Γ – ширина спектральной линии, $\Omega = \langle n \rangle / T$ – средняя частота следования импульсов от совокупности излучателей.

Естественное уширение линий обусловлено затуханием колебаний осцилляторов. Естественный спектр имеет лоренцеву форму, центральную частоту ω_0 и ширину $\Gamma = 1/\tau$. Т.к. $\tau \sim 10^{-8}$, ширина линии за счет уширения $\Delta f = \Gamma/(2\pi) \sim 10^7$ Гц.

Термодинамические системы статистически независимых осцилляторов. Модель абсолютно черного тела

На каждую СС независимых излучающих осцилляторов приходится по $\frac{1}{2} kT$ тепловой энергии. **Тепловое излучение** – электромагнитное излучение, возникающее за счет внутренней энергии тела. Тепловое излучение является единственным видом излучения, которое может находиться в состоянии ТД равнотемпературного излучения.

весия с веществом. Расход энергии на излучение компенсируется поглощением внешней энергии.

Спектральная плотность объемной энергии: $\rho(\nu, T) = \frac{dw}{d\nu}$. Равновесное излучение является изотропным. $dW = \frac{c}{4}\rho(\nu, T) d\nu$.

Испускательная способность: $r_\nu = \frac{dW}{d\nu}$, $r_\lambda = \frac{dW}{d\lambda}$, $\Rightarrow r_\lambda = \frac{c}{\lambda^2}r_\nu$. Энергетическая **светимость** тела: $R = \int_0^\infty r_\nu d\nu = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda$. **Поглощающая способность:** $a_\nu = \frac{dW_{\text{поглощ}}}{dW_{\text{пад}}} \leqslant 1$.

Абсолютно черным телом (АЧТ) называют тело, полностью поглощающее падающее на него излучение: $a_\nu^* = 1$.

Согласно принципу **детального равновесия**, для АЧТ $dW_{\text{изл}} = dW_{\text{погл}}$. Т.к. $dW_{\text{погл}} = a_\nu \frac{c}{4}\rho(\nu, T) d\nu$, $dW_{\text{изл}} = r_\nu d\nu$, получим **закон Кирхгофа**:

$$\frac{r_\nu}{a_\nu} = r_\nu^* = \frac{c}{4}\rho(\nu, T).$$

Функция r_ν^* называется **функцией Кирхгофа**.

Закон Стефана–Больцмана. Закон смещения Вина. Формулы Вина и Рэлея–Джинса

Согласно **закона Стефана–Больцмана**, энергетическая светимость АЧТ пропорциональна четвертой степени его температуры: $R_e = \sigma T^4$, где $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ – **постоянная Стефана–Больцмана**.

Максимум излучения АЧТ, согласно **закона смещения Вина**, зависит от его температуры следующим образом: $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$.

Эмпирически для функции Кирхгофа были получены приближения для длинноволновой и коротковолновой областей излучения: **формула Рэлея–Джинса** и **формула Вина** соответственно. Формула Вина: $r_\nu^* = \nu^3 \varphi(\nu/T)$.

Формула Рэлея–Джинса: $r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT$.

Данные приближения справедливы лишь для указанных областей длин волн, в противоположных областях они несправедливы. Кроме того, обе формулы терпят крах при $\nu \rightarrow \infty$: в этом случае светимость АЧТ стремится к бесконечности («ультрафиолетовая катастрофа»).

Формула Планка

Пусть $\langle \mathcal{E}_\nu \rangle$ – средняя энергия гармонического осциллятора. Тогда функция Кирхгофа $r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \mathcal{E}_\nu \rangle$. Согласно гипотезе Планка, энергия осцилляторов квантуется: $\mathcal{E}_{\nu_0} = n\mathcal{E}_{\nu_0} = nh\nu$, где h – **постоянная Планка**.

Согласно распределению Больцмана, вероятность нахождения квантовой системы в n -м состоянии равна $p_n = \mathfrak{C} \exp(-n\mathcal{E}_{\nu_0}/[kT])$, где $\mathfrak{C} = (\sum \exp \frac{-n\mathcal{E}_{\nu_0}}{kT})^{-1}$ – нормировочный коэффициент. Тогда получим:

$$\langle \mathcal{E}_\nu \rangle = \sum p_n n \mathcal{E}_{\nu_0} = -\mathcal{E}_{\nu_0} \frac{\frac{d}{d\xi} \sum \exp(-n\xi)}{\sum \exp(-n\xi)} = -\mathcal{E}_{\nu_0} \frac{d}{d\xi} \ln \sum \exp(-n\xi),$$

где $\xi = \frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{kT}$. Т.к. $\sum \exp(-n\xi) = (1 - \exp[-\xi])^{-1}$, $-\ln \sum \exp(-n\xi) = \ln(1 - \exp[-\xi])$, \Rightarrow

$$\langle \mathcal{E}_\nu \rangle = \frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{\exp(\frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{kT}) - 1}, \quad \text{и} \quad r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{\exp(\frac{\mathcal{E}_{\nu_0}}{kT}) - 1}.$$

Для спектральной плотности объемной энергии получим **формулу Планка**:

$$\rho = \frac{4}{c} r_\nu^* = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT} - 1)}.$$

Найдя предельные случаи формулы Планка при $\nu \rightarrow 0$ и $\nu \rightarrow \infty$, получим формулы Рэлея–Джинса и Вина соответственно. В частности, можно найти вид не установленной Вином функции $\varphi(\nu/T)$: $r_\nu^* = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \exp(-\frac{h\nu}{kT})$.

54 Излучение света атомами и молекулами

Модель двухуровневой системы. Спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна

Рассмотрим атом с двумя энергетическими уровнями: W_1 и W_2 . Пусть N_i – число атомов на i -м энергетическом уровне, $N_i = C \exp(-W_i/[kT])$. Согласно модели Планка, переход с верхнего энергетического уровня, W_1 , на нижний, W_2 , сопровождается излучением кванта света с энергией $h\nu = W_2 - W_1$.

Пусть в нашей двухуровневой системе имеется N_1 атомов, находящихся на уровне W_1 , и N_2 атомов на уровне W_2 . Согласно Эйнштейна, возможны следующие типы энергетических переходов:

- **спонтанное излучение** с вероятностью $P_{21}^{\text{сп}} = A_{21}N_2$;
- **вынужденное поглощение** с вероятностью $P_{12}^{\text{вых}} = B_{12}N_1\rho(\nu, T)$, где $\rho(\nu, T)$ – спектральная плотность внешней энергии;
- **вынужденное излучение** с вероятностью $P_{21}^{\text{вых}} = B_{21}N_2\rho(\nu, T)$.

Коэффициенты A и B называют **коэффициентами Эйнштейна**.

В состоянии равновесия $P_{21}^{\text{сп}} + P_{21}^{\text{вых}} = P_{12}^{\text{вых}}$, $\Rightarrow A_{21}N_2 + B_{21}N_2\rho = B_{12}N_1\rho$.

Тогда получим:

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \exp \frac{h\nu}{kT} - 1}.$$

Используя приближения Рэлея–Джинса получим: $B_{12} = B_{21}$, $A_{21}/B_{21} = 8\pi h \frac{\nu^3}{c^3}$.

Аналогично можно рассмотреть процесс излучения многоуровневыми системами. В данном случае необходимо ввести коэффициенты Эйнштейна A_{nm} и $B_{nm} = B_{mn}$; $A_{mn}/B_{mn} = 8\pi h \nu^3 c^{-3}$.

Явление люминесценции

Люминесценция — излучение света телами, превышающее тепловое излучение при той же температуре. Длительность люминесценции значительно пре- восходит длительность излучения атомных систем. Люминесцирующие вещества называют люминофорами. Люминесцентное излучение является неравновесным: оно вызывается центрами люминесценции — возбужденными атомами и молекулами.

Флуоресценция — люминесценция, прекращающаяся сразу после прекращения действия возбуждающего излучения (флуоресцирующие вещества излучают более в длинноволновом диапазоне, чем падающее излучение).

Фосфоресценция — люминесценция, сохраняющаяся длительное время после прекращения действия возбуждающего излучения.

Для люминесценции существует **правило Стокса**: $h\nu_{\text{падающ}} - h\nu_{\text{излуч}} = W$, где W — некоторая энергия. В зависимости от знака W люминесценцию делят на **стоксово** и **антистоксово** излучение: при $W > 0$ и $W < 0$ соответственно. В случае антистоксова излучения дополнительная энергия черпается из тепловой энергии тела.

Резонансное усиление света. Лазеры

Явление вынужденного излучения эквивалентно отрицательному поглощению света. При этом сохраняется частота, направление распространения, фаза и по-

ляризация возбуждающего излучения. Следовательно, вынужденное излучение строго когерентно с вызвавшей его причиной.

Однако, если большое число атомов квантовой системы находится на основном энергетическом уровне, происходит поглощение света, сопутствующееся переходом атомов в возбужденное состояние.

Если при прохождении через среду интенсивность света возрастает, среда называется усиливающей (активной) или *средой с отрицательным поглощением*. Для среды с инверсной заселенностью уровней справедлив **закон Бугера–Ламберта–Фабриканта**: $I = I_0 \exp(ax)$, $a > 0$.

Процесс перехода среды в инверсное состояние называется **накачкой**. Число актов вынужденного излучения пропорционально количеству атомов, находящихся в возбужденном состоянии. При $N_2 > N_1$ число актов излучения превосходит число актов поглощения, наблюдается вынужденное излучение, мощность которого превосходит мощность вынуждающего. При этом активная (накачанная) среда не нуждается в возбуждающем излучении: при наличии хотя бы одного акта излучения возникает цепная реакция перехода атомов в основное состояние, сопровождающаяся излучением плоскополяризованного высококогерентного излучения (резонансное усиление света).

Устройство, в основе работы которого лежит резонансное усиление света, — лазер, — наиболее удобно рассматривать по классической трехуровневой схеме. Лампой накачки с частотой $\nu > \nu_{\text{лаз}}$ атомы переводятся в возбужденное состояние, откуда они совершают безызлучательные переходы на квазистабильный уровень, время жизни на котором достаточно велико для создания инверсной заселенности уровней. По истечении времени жизни на квазистационарном уровне хотя бы один атом совершает переход в основное состояние, при котором излучается квант света. При попадании данного кванта в любой из возбужденных атомов происходит вынужденное излучение на той же частоте. В результате лавинообразного вынужденного излучения возникает мощный кратковременный импульс лазерного излучения. Для увеличения мощности излучения тело лазера помещается между двумя стенками, одна из которых является зеркальной, а вторая имеет коэффициент отражения немногим меньший единицы, через нее и выходит лазерное излучение.

Моды лазера. Синхронизация мод

Основными элементами оптических квантовых генераторов (лазеров) являются: активный элемент с инверсной насыщенностью, резонатор (параллельные зеркала) и источник накачки. Резонатор играет роль не только усилителя, но и селектора фотонов, движущихся параллельно оси лазера (в результате чего лазерный луч обладает малой пространственной расходимостью). Для самовоз-

буждения активного элемента необходимо обеспечить баланс амплитуд и фаз. Баланс амплитуд заключается в том, что $R_1 R_2 \exp(GL) \geq 1$, где R – коэффициенты отражения зеркал резонатора, G – коэффициент усиления света, L – длина тела лазера. Баланс фаз: $L = n\lambda/2$, т.е. в теле лазера должно обеспечиваться условие возникновения стоячих волн, набег фаз будет составлять 2π , что в наилучшей степени способствует усилению света.

Согласно фазового условия, $\nu_n = n\Delta\nu$, где $\Delta\nu_{\frac{1}{2}L}$ – **собственные моды лазера**. Количество мод зависит от соотношения $\Delta\nu$ и ширины спектрального диапазона лазера, $\Delta\nu_y$: $M = \Delta\nu_y/\Delta\nu$. $\Delta\nu_y$ определяется допплеровским уширением линий, $\Delta\nu \sim 10^0 \div 10^3 \text{ см}^{-1}$, $M \sim 10^0 \div 10^4$. Таким образом, излучение лазера является **многомодовым**.

Для получения одномодового импульса используют селектор (призму, дифракционную решетку) и диафрагму.

Если узкополосный одномодовый лазер генерирует колебания синусоидальной формы, то временной ход излучения зависит от того, каковы амплитуды и фазы различных мод. Существует два противоположных случая: моды могут быть полностью независимыми (оптический шум), либо же синхронизированными.

При синхронизации мод генерируется короткий импульс с интенсивностью $I_{max} = I_0 M^2$. Период следования максимальных импульсов называется *межмодовым интервалом* $T = \Delta\nu^{-1} = 2L/c$. Т.о., в данном случае через одинаковые промежутки времени, T , из резонатора будут выходить короткие мощные импульсы. Синхронизатором мод может быть *насыщающийся поглотитель*, помещенный внутрь резонатора, прозрачный только для мощных коротких импульсов (пассивная синхронизация мод).

Предельная длительность импульса, $\Delta t = (c\Delta\nu_y)^{-1}$, зависит от ширины спектральной полосы усиления лазера.

Характеристиками излучения лазера являются: основная длина волны, энергия импульса, его длительность, мощность непрерывной работы, ширина спектральной полосы, диапазон перестройки основной длины волны, угловая расходимость излучения (которая близка к дифракционному пределу). Пиковый поток мощности в луче лазера составляет порядка $10^{19} \text{ Вт}/\text{см}^2$ (напряженность ЭП на мишени достигает $10^{11} \text{ В}/\text{см}$ – больше, чем внутри атомов).

55 Дуализм явлений микромира. Дискретные свойства волн. Волновые свойства частиц

Кванты излучения

Рассмотрим ЭМ излучение в изолированной полости с изотермическими стенками, находящееся в состоянии равновесия с веществом. Спектральная плотность излучения $d\rho_\nu = \rho(\nu, T) d\nu$. При равновесии она будет изотропна. Излучение не будет зависеть от природы стенок. Поток энергии в полости $dj = \frac{c\rho}{4\pi} d\Omega$.

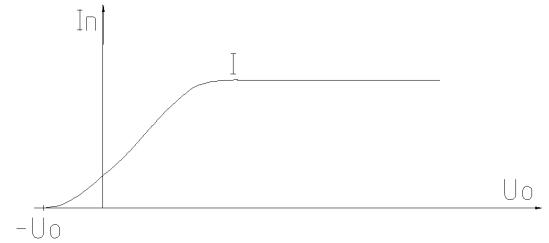
Согласно гипотезе Планка, излучение распространяется не непрерывно, а элементарными сгустками энергии — **квантами**. Энергия кванта излучения $E_\gamma = h\nu$, где h — **постоянная Планка**, ν — частота излучения. Спектральная плотность равновесного излучения абсолютно черного тела распределена согласно **формулы Планка**:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}.$$

Фотоэффект

Внешний фотоэффект (фотоэмиссия) — испускание веществом свободных электронов под действием электромагнитного излучения. **Внутренний фотоэффект** — перераспределение электронов в веществе по энергетическим уровням под воздействием внешнего ЭМП. **Фотопроводимость** — увеличение электронной проводимости вещества под действием света.

ВАХ фотоэффекта (см. рис.) имеет зону насыщения, когда количество электронов, испускаемых за единицу времени фотокатодом, достигает постоянного предельного уровня n_{max} . Ток насыщения $I_{max} = en_{max}$. Запирающее напряжение $-U_0$ объясняется существованием некоторой предельной скорости испускаемых фотоэлектронов: $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = eU_0$.



Законы внешнего фотоэффекта (Столетова):

1. Фототок насыщения при неизменном спектральном составе освещения пропорционален освещенности фотокатода, $I_{max} \propto E_{cat}$.
2. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов зависит от частоты падающего на фотокатод излучения и не зависит от его интенсивности.

3. Существует **красная граница** фотоэффекта (существует некоторая минимальная частота внешнего излучения, ν_{min} , при котором начинается фотоэффект).

Закон сохранения энергии при фотоэффекте носит название **уравнения Эйнштейна**:

$$h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2},$$

где A – **работа выхода фотоэлектрона**, $A = h\nu_{min}$, где ν_{min} – красная граница фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна объясняет все три закона Столетова.

Фотоэффект безынерционен. Он возникает сразу же, как только ЭМ волна взаимодействует с поверхностью проводника.

Помимо классического, одноэлектронного, фотоэффекта, возможен **многоэлектронный фотоэффект**, когда несколько квантов излучения выбивают один фотоэлектрон. В этом случае уравнение Эйнштейна примет вид: $Nh\nu = A + \frac{1}{2}mv_{max}^2$.

Рассеивание ЭМ излучения на свободных зарядах. Тормозное рентгеновское излучение

Эффект Комптона – изменение длины волны, λ , рентгеновских фотонов при их взаимодействии с рассеивающим веществом, содержащим легкие ато-

мы: $\boxed{\Delta\lambda = 2\lambda_K \sin^2 \frac{\theta}{2}}$, где $\lambda_K = h/(m_e c)$ – **комптоновская длина волны электрона**, θ – угол отклонения рентгеновского кванта.

Кинетическая энергия отдачи, испытываемой электроном при эффекте Комптона, равна

$$W = h\nu \frac{2a \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2a \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \text{где } a = \frac{\lambda_K}{\lambda}.$$

Следует отметить, что свободные заряды способны лишь изменять энергию падающих на них квантов ЭМ излучения, тратя часть первоначальной энергии кванта на увеличение собственной кинетической энергии. Полностью поглощать квант излучения способны лишь связанные электроны. При этом поглощение сопровождается переходом электрона на более высокий энергетический уровень.

При торможении веществом быстрых электронов (или других заряженных частиц) возникает **тормозное излучение**, имеющее сплошной спектр с границей $\nu_{max} = W_k^{(e)}/h$, где $W_k^{(e)}$ – начальная кинетическая энергия электрона.

Частицы и волны. Гипотеза де Бройля

Согласно гипотезе корпускулярно–волнового дуализма, электромагнитное излучение обладает свойствами частиц (это доказывается существованием фотоэффекта, светового давления). Де Бройль предположил, что корпускулярно–волновой дуализм имеет и обратный эффект: все частицы, движущиеся в данной системе отсчета, обладают волновыми свойствами. Их длина волны (**длина волны де Бройля**), $\lambda_{dB} = h/p = h/(mv)$, или $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, где $\hbar = h/(2\pi)$, k – волновое число тела.

Выражая через кинетическую энергию, W_k , получим: $\lambda_{dB} = h/\sqrt{2mW_k}$. Для электрона, ускоряющегося под действием разности потенциалов U , $\lambda_{dB} = 12.25/\sqrt{U}\text{\AA}$.

Формула де Бройля подтверждается опытами по рассеянию электронов и других частиц на кристаллах, дифракции электронов.

У макротел $\lambda_{dB} \sim 0$, поэтому их волновые свойства не обнаруживаются.

Фазовая скорость волн де Бройля $v_p = \omega/k = c^2/v$, $v_p = c^2 m \lambda_{dB}/h$. Т.к. $c > v$, то фазовая скорость волн де Бройля превышает скорость света. Зависимость фазовой скорости волн де Бройля от длины волны означает, что они испытывают дисперсию.

Групповая скорость волн де Бройля $u = \frac{d\omega}{dk} = v$ совпадает со скоростью тела (что и следовало ожидать).

Волны де Бройля имеют статистический смысл: квадрат модуля амплитуды дебройлевской волны равен вероятности обнаружения частицы в данной точке.

В квантовой физике наблюдаются характерные закономерности. Например, координата и импульс частицы не могут быть одновременно известны с доподлинной точностью: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$, аналогично, $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. Эти соотношения называются **соотношениями неопределенности Гайзенберга**. $\Delta x \Delta v_x \geq \hbar/(2m)$ – чем больше масса тела, тем меньше неопределенность измерения его координат и скоростей, т.е. тем большее право мы имеем применить к нему понятие траектории.

Опыты Девиссона–Джермера и Томсона

Опыт Девиссона–Джермера заключается в изучении отражения электронов от монокристалла никеля. Рассеяние электронов было наиболее эффективным при некотором угле φ , соответствующем отражению электронов от атомных плоскостей. Зная период кристалла, d , можно вычислить длину волны, соответствующую первому дифракционному максимуму для данной длины волны: $2d \sin \theta = \lambda$. Полученная длина волны (1.65 \AA) совпала с дебройлевской длиной волны электрона.

Томсон и Тартаковский (независимо) получили дифракционную картину при прохождении электронного пучка через металлическую фольгу.

Штерн показал, что аналогично рассеиваются атомные и молекулярные пучки.

Биберман, Сушкин и Фабрикант провели эксперимент, в котором интенсивность потока электронов была столь малой, что через узкую щель они проходили по одиночке (цель опыта – избавиться от кулоновского взаимодействия электронов). При этом также наблюдалась дифракционная картина.

Все эти опыты наглядно доказывают двусторонний характер корпускулярно–волнового дуализма.

Эффект Черенкова–Вавилова

Излучением Черенкова–Вавилова называют излучение света заряженной частицей, возникающее при ее движении в среде с постоянной скоростью v , превышающей фазовую скорость света в этой среде.

Возникновение эффекта Черенкова–Вавилова можно объяснить с помощью принципа Гюйгенса. Если частица движется в среде со скоростью $v < c$, испущенные ею в разные моменты времени парциальные волны не взаимодействуют и не имеют общей огибающей, т.е. заряд при этом не излучает. Однако, если $v > c$, соответствующие разным парциальным волнам сферы пересекаются. Их общая огибающая представляет собой конус с вершиной, совпадающей с положением частицы. Нормали к образующим конуса определяют волновые векторы, т.е. направление распространения света. Угол θ , который составляет волновой вектор с направлением движения частицы, удовлетворяет отношению $\cos \theta = u/v = c/(nv)$.

Циклотронное и синхротронное излучение

Циклотронное излучение является электромагнитным излучением заряженной частицы, движущейся по окружности или спирали в МП, один из видов магнитотормозного излучения. Обычно данный термин применяют к излучению нерелятивистских частиц, происходящему на основной циклотронной частоте и ее первых гармониках (см. *плазма*).

Синхротронное излучение является магнитотормозным излучением релятивистских частиц, движущихся в однородном МП. В связи с высокой скоростью частиц, сильно преобладает излучение на высших гармониках циклотронной частоты, что приводит к квазинепрерывному спектру излучения.

Синхротронное излучение распространяется в узком конусе с углом раствора $\psi \propto mc^2/E$, где m – масса покоя частицы, E – ее энергия. Полная мощность синхротронного излучения пропорциональна квадрату энергии частицы, квадрату перпендикулярной скорости составляющей МП и обратно пропорциональна четвертой степени массы частицы. Эта зависимость приводит к тому, что синхротронное излучение наиболее существенно для легких частиц.

Рассеяние ЭМВ на свободных электронах

Эффектом Комптона называют рассеяние ЭМВ на свободном электроне, сопровождающееся уменьшением частоты. Эффект хорошо наблюдается для высокочастотного излучения (рентгеновский диапазон и выше).

Теория эффекта разработана Комптоном и Дебаем. Для его объяснения пришлось предположить, что ЭМВ представляют собой потоки фотонов. Каждый фотон обладает энергией $E = h\nu$ и импульсом $p = (h/\lambda)\vec{n}$, где \vec{n} – орт распространения света. Исходя из законов сохранения, Комптон получил формулу для сдвига длины волны:

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta),$$

где λ' – длина волны после рассеяния, θ – угол рассеяния. Параметр $\frac{h}{m_e c}$ называют **комптоновской длиной волны** электрона ($2.4 \cdot 10^{-12}$ м).

Лазеры на свободных электронах

В лазерах на свободных электронах (ЛСЭ) активной средой является поток электронов, колеблющихся под действием внешнего электромагнитного поля и перемещающихся с релятивистской скоростью v_{\parallel} в направлении распространения излучаемой волны.

Благодаря эффекту Допплера частота излучения электронов в ЛСЭ во много раз превышает частоту колебания электронов, Ω :

$$\omega \simeq s\Omega / \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \cos\varphi\right),$$

где s – номер гармоники, φ – малый угол между направлением движения электронов и направлением излучения волны: $\varphi \lesssim \sqrt{1 - (v/c)^2}$, $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$.

Достоинством ЛСЭ является возможность плавной перестройки частоты генерации изменением v_{\parallel} или φ .

При квантовом описании возможность преобладания в ЛСЭ вынужденного излучения над поглощением объясняется небольшим различием частот волн,

которые электрон способен излучить и поглотить. Это различие обусловлено отдачей, испытываемой электроном при излучении или поглощении кванта. Т.к. в реальных условиях естественная ширина линии существенно больше разности этих частот, вынужденное поглощение и излучение раздельно не наблюдаются, а преобладание излучения имеет место для волны, частота которой ближе к излучаемой частоте.

Т.к. излученный γ -квант обладает энергией, значительно меньшей энергии электрона, один электрон может излучить значительное количество квантов. Поэтому движение и излучение частиц могут быть описаны уравнениями классической электродинамики. В классическом описании вынужденному излучению в ЛСЭ отвечает самосогласованный процесс группировки электронов в сгустки под действием затравочной волны и последующее усиление этой волны в результате когерентного излучения сгустков.

Атомная и ядерная физика, элементарные частицы

56 Элементарная теория атома водорода

Проблема устойчивости атома в планетарной модели. Закономерности в излучении атома водорода

Бальмер обнаружил, что для атома водорода длины волн спектральных линий в видимой и близкой УФ областях расположены согласно закону $\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}$,

где $n = 3, 4, 5, \dots$. Для частот эта формула примет вид $\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, где

R – постоянная Ридберга.

Дальнейшие исследования показали, что в спектре водорода имеется еще несколько серий. В УФ части спектра находится серия Лаймана. Остальные серии лежат в инфракрасной области. Линии этих серий могут быть представлены в виде аналогичных формул.

В общем случае придет к формуле $\omega_{nm} = T_1(m) - T_2(n)$, где $T(x) = R/x^2$ – спектральный терм $n = \overline{m+1, \infty}$. Значение m составляет: 1 для **серии Лаймана**, 2 для **серии Бальмера**, 3 для **серии Пашена**, 4 для **серии Брэкета**, 5 для **серии Пфунда** и т.д.

Данная обобщенная формула Бальмера является математическим изложением **комбинационного принципа**. Комбинационному принципу можно дать несколько иную формулировку: *если известны волновые числа двух спектральных линий одной и той же серии, то их разность будет также волновым числом некоторой третьей спектральной линии, принадлежащей тому же атому.*

На основе данных закономерностей сложилась **модель атома Томсона**. Согласно ей, атом является равномерно заполненным положительным зарядом шаром, внутри которого находятся отрицательно заряженные валентные электроны.

Данная модель была опровергнута опытами по рассеянию α -частиц на атомах металлов. Область, заряженная положительно, оказалась очень небольшой по сравнению с эффективным размером атома. Появилась **планетарная модель атома**. В этой модели атом состоит из положительно заряженного ядра, занимающего очень небольшую область пространства, вокруг которого вращаются электроны.

Однако, классическая физика уперлась в тупик, пытаясь доказать возможность существования планетарной модели. Система движущихся зарядов, согласно классической физике, должна излучать (чего не наблюдается). При излучении энергия зарядов постепенно снижается, в результате чего, в концепциях, такая система окажется разрушенной, т.к. электрон, постепенно теряя

свою кинетическую энергию, упадет на ядро.

Постулаты Бора. Принцип соответствия

Для обоснования планетарной модели Нильс Бор ввел три допущения, позволяющих рассматривать данную систему как устойчивую. Данные допущения носят название **постулатов Бора**.

1. (Постулат стационарных состояний): *в атоме существует набор стационарных состояний, находясь в которых атом не излучает ЭМВ.* Стационарным состояниям соответствуют стационарные орбиты, по которым ускоренно движется электрон, не излучая при этом.
2. (Правило квантования орбит): *в стационарном состоянии атома электрон, движущийся по круговой орбите, имеет квантованные значения момента импульса: $L_k = mvr = k\hbar$, где k равно числу дебройлевских длин волн электрона, укладывающихся на длине круговой орбиты: $k = 2\pi r/\lambda_{dB} = rmv/\hbar$.*
3. (Правило частот): *при переходе атома из одного стационарного состояния, n , в другое, m , происходит излучение или поглощение фотона $\hbar\omega_{nm} = W_n - W_m$, где W – энергия атома в стационарном состоянии.*

Правило квантования орбит получено из **постулата Планка**: $W_n = n\hbar\omega$. Пусть q – координата гармонического осциллятора, p – его импульс. Тогда $W_n = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega q^2}{2} = n\hbar\omega$. Получили уравнение эллипса:

$$\frac{q^2}{2n\hbar/(m\omega)} + \frac{p^2}{2mn\hbar\omega} = 1.$$

Полуосами эллипса являются параметры $a = \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}}$ и $b = \sqrt{2mn\hbar\omega}$.

Площадь эллипса $S_n = \pi ab = 2\pi\hbar n = hn$. Между тем, $S_n = \oint p dq = hn$. Для электрона в качестве q естественно взять фазу колебания φ , а $p = L$ – момент импульса электрона. Тогда получим: $\oint L d\varphi = hn$. Т.к. сила, с которой ядро действует на электрон, уравновешивает центробежную силу, получим: $L = \text{const}$, $\Rightarrow 2\pi L = 2\pi\hbar n$, $\Rightarrow [L = n\hbar]$. Что означает квантование момента импульса электрона.

Согласно **принципу соответствия**, всякая более общая теория содержит в себе менее общую, как предельный случай. Например, предельным случаем преобразований Лоренца являются преобразования Галилея. В **формулировке Бора** принцип соответствия звучит так: *выводы и результаты квантовой механики при больших квантовых числах должны соответствовать классическим результатам.* Действительно, при очень больших квантовых числах

энергия электрона изменяется квазинепрерывно, что позволяет использовать методы классической механики.

Опыты Франка и Герца

Существование дискретных энергетических уровней атома подтверждается опытами, осуществленными Франком и Герцем.

В трубке, заполненной парами ртути под небольшим давлением (~ 1 мм рт. ст.), имелись три электрода: катод, сетка и анод. Электроны, вылетавшие из катода вследствие термоэлектронной эмиссии, ускорялись разностью потенциалов, приложенной между катодом и сеткой. Эту разность потенциалов можно было плавно менять с помощью потенциометра. Между сеткой и анодом создавалось слабое электрическое поле, тормозившее движение электронов к аноду. Исследовалась зависимость силы тока в цепи анода от напряжения между катодом и сеткой. Эксперимент показал, что сила тока вначале монотонно возрастала, достигая максимума, после чего с дальнейшим увеличением напряжения резко падала, достигая минимума, и снова начинала расти.

Такой ход кривой объясняется тем, что вследствие дискретности энергетических уровней атомы могут воспринимать энергию только порциями ΔE , соответствующими разности энергий стационарных состояний. До тех пор, пока энергия электрона меньше ΔE , соударения между электроном и атомом ртути носят упругий характер, и энергия электрона при столкновениях практически не изменяется. Часть электронов попадает на сетку, остальные же, проскочив через сетку, достигают анода, создавая ток в цепи гальванометра. Чем больше скорость, с которой электроны достигают сетки (т.е. чем больше ΔE), тем большей будет доля электронов, проскочивших через сетку, и тем, следовательно, большей будет сила тока. Когда энергия, накапливаемая электроном в промежутке катод–сетка, достигает значения ΔE , соударения перестают быть упругими — электроны при ударах об атомы передают им энергию, и продолжают затем двигаться с меньшей скоростью. Поэтому число электронов, достигающих анода, уменьшается.

Атомы, получившие при соударении с электронами энергию ΔE , переходят в возбужденное состояние, из которого они спустя время порядка 10^{-8} с возвращаются в основное состояние, излучая фотон с частотой $\omega = \Delta E/\hbar$. При напряжении, превышающем 9.8 В, электрон на пути катод – анод может дважды претерпеть неупругое соударение с атомами ртути, теряя при этом энергию 9.8 эВ, вследствие чего сила тока снова начнет уменьшаться. При еще большем напряжении возможны трехкратные неупругие соударения электронов с атомами, что приводит к возникновению максимума при $U = 14.7$ В, и т.д.

Изотопический эффект

С учетом движения в атоме водорода и электрона, и ядра относительно общего центра инерции, в формулах, описывающих движение электрона вокруг ядра, под массой электрона, m_e следует понимать **приведенную массу** системы электрон–ядро:

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{M}},$$

где M – масса ядра.

С учетом движения ядра постоянная Ридберга имеет наименьшее значение для атома водорода; предельного значения она достигает при $M = \infty$. Вследствие различия значений R для разных M в спектрах проявляется **изотопический эффект**, связанный с существованием нескольких изотопов одного и того же химического элемента.

Для смеси изотопов этот эффект состоит в наличии дополнительных спектральных линий к линиям атомов, ядра которых принадлежат изотопу с наибольшей распространенностью. Интенсивности этих линий относятся, как процентные содержания изотопов в веществе, а длины волн смещены друг относительно друга для изотопов с массами M' и M'' на величину

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{m_e(M'' - M')}{(\frac{1}{2}[M' + M''])^2}.$$

С другой стороны, $\Delta\lambda/\lambda = (R_1 - R_2)/R_1$, где R_1 и R_2 – постоянные Ридберга для обоих изотопов.

При взаимодействии отрицательных мюонов с веществом, атомные ядра могут захватывать мюоны на свои орбиты, образуя с ними **мезоатомы**. Поведение мюонов в атомах существенно не отличается от поведения электронов, за исключением малой продолжительности жизни мюонов. Атомные электроны не оказывают сильного влияния на движение мюона в атоме. Малый радиус мюонной орбиты и его уменьшение с ростом заряда ядра приводят к тому, что уже при $Z \approx 30$ мюоны должны проникать в ядро. На энергетических уровнях мюона поэтому сказываются размеры и структура ядра, которое в этом случае уже нельзя считать точечным, как это делается при решении уравнения Шрёдингера для атома.

При замедлении позитронов в веществе иногда образуется **позитроний** – система из позитрона и электрона, движущихся вокруг общего центра тяжести. Позитрон нельзя считать неподвижным, так как его масса равна массе электрона. Радиусы орбит в позитронии вдвое больше радиусов соответствующих орбит в атоме водорода, а энергия связи позитрония вдвое меньше энергии

связи атома водорода. В зависимости от ориентации спинов электрона и позитрона возникают два состояния позитрония: *ортосостояние* при параллельной ориентации спинов и *парасостояние* при их антипараллельной ориентации

Водородоподобные ионы. Релятивистское обобщение модели Бора. Постоянная тонкой структуры

Для атома водорода энергия n -го уровня $E_n = -R/n^2$. Постоянная Ридберга

$$R = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}.$$

Водородоподобными ионами являются ионы атомов со степе-

нями ионизации, равными $N - 1$, где N – порядковый номер атома. Такими ионами являются, например, He^+ (He^I), Li^{II} , Be^{III} и т.д. Т.е. это атомы с одним единственным электроном.

Спектральная структура водородоподобных ионов сильно похожа на структуру спектра атома водорода. Для них получена **формула Бальмера–Ридберга**:

$$E_{nm} = Z^2 R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где Z – заряд ядра атома.

Относительно спинового момента атом водорода является вырожденным: все энергетические уровни для электронов, отличающихся лишь спиновыми числами, совпадают. Щелочные металлы, однако, не являются вырожденными относительно спинового числа. Поэтому их спектры содержат несколько серий: *основную* ($f^{n>4} \rightarrow d^3$), *диффузную* ($d^{n>2} \rightarrow p^3$), *резкую* ($s^{n>3} \rightarrow p^3$) и *главную* ($p^{n>2} \rightarrow s^3$), где s , p , d и f – соответствующие электронные орбиты (**термы**). Энергия n -го уровня для таких атомов в данном случае описывается

уравнением $E_n = \frac{R}{(n + \alpha)^2}$, где $\alpha < 0$ – **квантовый дефект**, необходимый для расчетов энергий атома, соответствующих данной серии.

Таким образом, спектр щелочных металлов имеет **тонкую структуру**: большинство линий имеют двойную или большую кратность. Сложные линии, содержащие несколько компонент, называют **мультиплетами**, в отличие от простых одиночных линий – **синглетов**.

Для объяснения тонкой структуры **Гаудсмит** и **Уленбек** выдвинули гипотезу, что электрон обладает собственным моментом импульса – **спином**. Наличие спинового момента и все его свойства вытекают из установленного Дираком уравнения квантовой механики, удовлетворяющего требованиям теории относительности. Т.о., спин является одновременно и квантовым, и релятивистским свойством частиц. Спин электрона $s_e = \pm \hbar/2$. Обычно постоянную Планка в

выражении для спина опускают, просто говоря, что *электрон обладает полуцелым спином*. Модуль спинового момента $M = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{3}$. **Спиновое магнитное квантовое число** $M_{s_z} = m_s\hbar$.

Так как момент импульса атомного ядра равен нулю, момент импульса атома водорода равен моменту импульса электрона, $M_e + M_s$. $\vec{M}_j = \vec{M}_l + \vec{M}_s$, где M_l – **орбитальный момент** электрона, $j = l+s, l-s$. Из-за **спин–орбитального взаимодействия** энергия атома зависит от взаимной ориентации спинового и орбитального моментов электрона.

Т.о., каждый терм, кроме s , распадается на дублеты, соответствующие разным ориентациям спина. Согласно **правилам отбора**, при переходе между разными энергетическими состояниями магнитный момент атома изменяется как $\Delta j = 0, \pm 1$. В результате при переходе между двумя энергетическими уровнями возникают триплеты (точнее, сложные дублеты).

Тонкая структура энергетических уровней является релятивистским эффектом. Согласно релятивистской квантовой теории, тонкая структура спектра $\Delta E = \frac{\alpha^2}{16}E_i$, где E_i – энергия ионизации атома водорода, $\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch} \approx \frac{1}{137}$ – **постоянная тонкой структуры**.

57 Основы квантовой механики

Квантовая система, ее состояние, измеряемые параметры

В основе квантовой теории лежат два принципа: **принцип дискретности** (некоторые физические величины в определенных условиях могут принимать только дискретные значения) и **принцип корпускулярно–волнового дуализма** (микрообъект ведет себя в одних условиях как волна, в других как частица, являясь до опыта и тем и другим, а после опыта ни тем, ни другим в классическом смысле слова).

Под **состоянием квантовой системы** понимают набор характеристик, позволяющих выделить и идентифицировать конкретную физическую систему в конкретных физических условиях. Под **наблюдаемой** понимают любую физическую величину, которая может быть измерена в эксперименте, результатом которого должно быть обязательно действительное число. Под **оператором** \hat{F} подразумевают правило, посредством которого одной функции ψ , сопоставляется другая функция, φ : $\varphi = \hat{F}\psi$.

В **фазовом пространстве** ($\Phi\Pi$) квантовое состояние системы характеризуется точкой. Если задать положение этой точки относительно начала отсчета $\Phi\Pi$, получим **вектор состояния** системы, который обозначается как $\langle\psi|$ (**бравектор**) или $|\psi\rangle$ (**Кэт–вектор**).

Собственное состояние квантовой системы — такое состояние, для которого результаты эксперимента можно представить с полной определенностью. В собственных состояниях физические величины имеют определенные точные значения (*чистые состояния*), а их конкретные значения называются **собственными значениями**, α .

Для любой наблюдаемой величины A существует линейный оператор \hat{A} . Уравнение на собственные значения имеет вид: $\hat{A}|\psi_i\rangle = \alpha_i|\psi_i\rangle$.

Совокупность всех собственных значений оператора \hat{F} образует его **спектр**. Задача нахождения спектра конкретного линейного оператора играет фундаментальную роль в квантовой механике.

Согласно **принципу соответствия**, $\widehat{f(A)} = f(\hat{A})$.

Уравнения Гайзенберга

Если $|\Psi_0\rangle$ — вектор состояния системы в начальный момент времени, то в представлении Шрёдингера вектор состояния в произвольный момент времени примет вид: $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi_0\rangle$, где \hat{U} — **унитарный оператор эволюции** системы: $\hat{U}\hat{U}^* = 1$. Если гамильтониан системы, \hat{H} , не зависит от времени, среднее значение любой величины F можно представить в виде среднего значения некоторого оператора \hat{F}_0 , взятого по начальному вектору состояния:

$$\bar{F} = \langle \Psi(t) | \hat{F} | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{F}_0 | \Psi_0 \rangle.$$

Оператор $\hat{F}_0 = \hat{U}^* \hat{F} \hat{U}$ называется оператором физической величины в представлении Гайзенберга. Для любой физической величины, G , оператор которой коммутирует с гамильтонианом, $[\hat{G}, \hat{H}] = 0$, $G = G_0$.

Используя уравнения для оператора эволюции

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \hat{H}\hat{U}, \quad -i\hbar \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial t} = \hat{U}^*\hat{H},$$

можно найти производную по времени оператора \hat{F}_0 :

$$\frac{\partial \hat{F}_0}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}_0] + \frac{\partial \hat{F}_0}{\partial t}.$$

Это уравнение и правила коммутации операторов физических величин служат основой квантовомеханического описания динамической системы в представлении Гайзенберга.

Если в качестве векторов состояния выбраны состояния $\langle n |$ и $\langle m |$ с определенной энергией E_n и E_m , то между матрицами операторов в представлении

Шрёдингера и Гайзенберга существует связь:

$$\langle m | \hat{F} | n \rangle = \langle m | \hat{F} | n \rangle \exp(i\omega_{mn}t), \quad \omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar.$$

Для динамических переменных (например, координат, q_i , и импульсов, p_i) операторные уравнения с учетом коммутационных соотношений, $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ принимают вид, аналогичный классическим уравнениям Гамильтона (**теорема Эренфеста**):

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{q}_i] = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i}, \quad \frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}_i] = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i}.$$

Свойства волновой функции. Уравнение Шрёдингера. Стационарные и нестационарные состояния. Плотность вероятности и плотность потока вероятности

Линейным называется оператор \hat{A} , действие которого на совокупность векторов состояния линейно: для $|\psi\rangle = \sum c_i |\psi_i\rangle$ выполняется $\hat{A}|\psi\rangle = \sum c_i \alpha_i |\psi_i\rangle$.

Помимо линейности, операторы наблюдаемых должны удовлетворять требованию **эрмитовости**: $\langle \psi | \hat{A} | \varphi \rangle = \langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle$, т.е. быть самосопряженным.

В векторном представлении основной характеристикой объекта является вектор состояния $|\varphi\rangle$, который в более простом (но менее наглядном) случае заменяется скаляром — **волновой функцией**.

Шрёдингер сопоставил движению микрочастицы комплексную функцию координат и времени, которую назвал волновой функцией ψ . Вид волновой функции является решением **уравнения Шрёдингера** (уШ):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \hat{H}|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t}.$$

Обычно исследуются стационарные состояния системы: $|\psi(t)\rangle = |\psi\rangle \exp(-iEt/\hbar)$.

В **стационарном** случае уШ имеет вид: $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, где E — энергия системы в данном стационарном состоянии.

Согласно Борну, квадрат модуля волновой функции, $|\psi|^2$ определяет вероятность нахождения частицы в объеме $\Phi \Pi dV$: $dP = A|\psi|^2 dV = A\psi^*\psi dV$, или, для векторов состояния: $dP = A\langle\psi|\psi\rangle$, где A — некоторый нормировочный коэффициент. Для того, чтобы избавиться от A , можно нормировать волновую функцию: $\int \langle\psi|\psi\rangle dV = 1$, в этом случае квадрат модуля волновой функции

будет равняться вероятности нахождения частицы в данном элементе объема ФП.

Следует указать, что даже нормированная *волновая функция определена с точностью до фазового множителя* $\exp(i\alpha)$: если $\langle \psi_1 | = \exp(i\alpha) \langle \psi |$, то $|\psi_1\rangle = |\psi\rangle \exp(-i\alpha)$, $\Rightarrow \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$.

Совокупность волновых функций квантовой системы, $|\psi_i\rangle$ образует ее **базис**, который должен быть **ортонормированным** ($\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$) и **полным** (любую волновую функцию $|\psi\rangle$ системы можно линейно выразить через другие функции базиса: $|\psi\rangle = \sum c_i |\psi_i\rangle$, хотя бы одна $c_i \neq 0$).

Движению микрочастицы соответствует перераспределение плотности вероятности, $\langle \psi | \psi \rangle$, в ФП. Максимум вероятности как бы «перетекает» из одних точек ФП в другие. Движение частиц в пространстве характеризуется специальной величиной — **плотностью потока вероятности**, которую можно найти, опираясь на основное уравнение квантовой механики.

Определим, как изменяется величина плотности вероятности с течением времени: $\frac{\partial \langle \psi | \psi \rangle}{\partial t} = -\operatorname{div} |j\rangle$, где $|j\rangle = \frac{i\hbar}{2m}(|\psi\rangle \nabla \langle \psi | - \langle \psi | \nabla |\psi\rangle)$. $|j\rangle$ есть вектор плотности потока вероятности, т.к. выражение для производной плотности вероятности совпадает по форме с законом непрерывности тока. Убыль вероятности нахождения частицы в объеме V равна потоку вектора $|j\rangle$ через поверхность, ограничивающую объем V .

В силу условия нормировки, суммарное значение вероятности во всем пространстве V сохраняется, вероятность лишь может перераспределяться между отдельными областями. Из смысла волновой функции вытекает, что *квантовая механика имеет статистический характер*, т.е. с помощью волновой функции можно лишь предсказать, с какой вероятностью частица может быть обнаружена в различных точках пространства.

Выведем уШ по де Бройлю. Волновую функцию частицы можно представить в виде плоской волны де Бройля: $\psi = a \exp(-i[\omega t - kx])$, где $\omega = E/\hbar$, $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}$, $k = 2\pi/\lambda = mv/\hbar$, $\Rightarrow \boxed{\psi = a \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]}$. $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\psi$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2 \psi$, $\Rightarrow E = \frac{1}{\psi} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$, $p^2 = -\frac{1}{\psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, а т.к. $E = \frac{p^2}{2m}$, получим уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

которое совпадает с уШ при $U = 0$.

$$\text{При } U \neq 0, \frac{p^2}{2m} = E - U, \Rightarrow -\frac{1}{\psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\psi} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - U, \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Операторы физических величин. Среднее значение и дисперсия физической величины

Рассмотрим вид операторов физических величин в координатном представлении, где $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$, $\hat{z} = z$. Для этого воспользуемся принципом соответствия: $\hat{U}(x, y, z) = U(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Получим для оператора кинетической энергии:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E\psi, \Rightarrow \boxed{\hat{E} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)}.$$

Оператор импульса:

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2), \Rightarrow \hat{p}_{x,y,z}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial(x, y, z)^2}, \boxed{\hat{p}_{x,y,z} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial(x, y, z)}}.$$

Оператор момента импульса:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \Rightarrow L_{x,y,z} = i[(y, z, x)p_{z,x,y} - (z, x, y)p_{y,z,x}], \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)}.$$

Так как квантовая механика оперирует с вероятностными величинами, то понятие физической величины A заменяется понятием ее **среднего значения**:

$$\overline{A} = \int \psi^* \hat{A} \psi dV, \quad \text{или} \quad \overline{A} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

Дисперсия физической величины

$$D_A = \overline{A^2} - \overline{A}^2 = \int \psi^* \hat{A}^2 \psi dV - \left(\int \psi^* \hat{A} \psi dV \right)^2, \text{ или } D = \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - (\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle)^2.$$

Флуктуация величины A характеризуется ее **среднеквадратичным отклонением**: $\sigma_A = \sqrt{D_A}$, которое можно нормировать: $\delta_A = \sqrt{D_A}/\overline{A}$.

Две наблюдаемые называются **совместными**, если изменение одной из них не влияет на изменение другой. A и B совместны тогда и только тогда, когда соответствующие им операторы коммутируют друг с другом: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$, $\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle) - \hat{B}(\hat{A}|\psi\rangle) = \hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle) - \alpha\hat{B}|\psi\rangle = 0$, где α – собственное значение оператора \hat{A} . Следовательно, вектор $\hat{B}|\psi\rangle$ также является собственным вектором оператора \hat{A} , принадлежащим тому же собственному значению α .

Систему совместных наблюдаемых называют **полной**, если никакие два состояния не имеют одинаковых собственных значений для всех этих наблюдаемых. Т.о., задание собственных значений всех этих наблюдаемых однозначно определяет состояние квантовой системы.

Гамильтониан. Собственные значения гамильтониана

Гамильтониан, \hat{H} , – оператор полной энергии системы:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{U}.$$

В стационарном случае гамильтониан не зависит от времени, следовательно, уШ превращается в *уравнение на собственные значения* \hat{H} : $\boxed{\hat{H}|\psi\rangle = E_n|\psi\rangle}$.

Рассмотрим значения энергии частицы, находящейся в бесконечной одномерной прямоугольной потенциальной яме с границами $x = 0$ и $x = l$. За пределами ямы $\psi \equiv 0$, \Rightarrow получим ГУ: $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Внутри ямы $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$, $\Rightarrow \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$.

Пусть $k^2 = 2mE/\hbar^2$, тогда $\psi_{xx} + k^2\psi = 0$, $\Rightarrow \psi(x) = a \sin(kx + \alpha)$. Из ГУ $\Rightarrow \alpha = 0$, $kl = \pm n\pi$, $\Rightarrow k = \pm \pi n/l$. Получим **спектр значений энергии**

частицы: $E_n = \boxed{\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2ml}}$. Разность между соседними уровнями энергии $\Delta E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1) \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{ml^2}n$. Собственные функции: $\psi_n = a \sin(\pi nx/l)$. Нормируя, получим: $\psi = \sqrt{2/l} \sin(\pi nx/l)$.

Т.о., получили **дискретный** спектр энергии частицы в потенциальной яме. В отличие от частицы в яме, у свободной частицы спектр является **квазинепрерывным**, условно его можно считать сплошным (действительно сплошных спектров, ввиду квантового характера физических процессов, в природе не существует).

Т.о., связанные электроны в атомах при переходах между энергетическими уровнями формируют дискретный электромагнитный спектр вещества. При торможении быстрых электронов излучается квазинепрерывный (сплошной) спектр.

58 Одномерные квантовомеханические задачи

Свободное движение частицы. Гармонический осциллятор

(пример с прямоугольной потенциальной ямой см. в предыдущем вопросе)

Свободное движение. При свободном движении частицы $U = 0$, \Rightarrow уШ примет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0, \text{ или } \Delta\psi + k^2\psi = 0, k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

В одномерном случае решение будет представлять собой суперпозицию движущихся противоположно волн: $\psi = A \exp(-i/\hbar\sqrt{2mE}x) + B \exp(i/\hbar\sqrt{2mE}x)$, или $\psi = a \cos(kx + \alpha)$.

ГУ в данном случае отсутствуют (частица движется из $-\infty$ в $+\infty$), однако сохраняется требование нормировки. Нахождение нормировочного интеграла невозможно, поэтому зачастую на частицу накладывают дополнительные ГУ, ограничивая область ее движения, пусть большим, но конечным интервалом.

Линейный гармонический осциллятор

Частица с массой m колебается с частотой ω_0 вдоль оси OX под действием квазинепрерывной потенциальной силы $F = -kx$, $k = m\omega^2$, $U = m\omega_0^2x^2/2$, уШ:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

Решения: $E_n = (n+1/2)\hbar\omega_0$, при $n \gg 1$: $E_n \approx n\hbar\omega_0$, как и постулировал Планк.

Собственные функции: $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2H_n(\chi)}\right)$, где $\chi = \frac{x}{x_0}$, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$, H_n – полином Чебышева–Эрмита n -го порядка:

$$H_n(\chi) = \frac{(1-)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left(\chi^2 \frac{d^n(\exp[-\chi^2])}{d\chi^n}\right).$$

Функция ψ_n имеет n узлов (точек с $\psi = 0$).

Отличием квантовомеханического решения уравнения колебания гармонического осциллятора от классического является существование энергии нулевых колебаний ($E_0 = \hbar\omega_0/2$), в классической же теории $E_0 = 0$.

Туннельный эффект

Рассмотрим прохождение частицы слева направо сквозь прямоугольный барьера

$$U = \begin{cases} U_0, & x \in (0, l); \\ 0, & x \notin (0, l). \end{cases}$$

Нас интересует случай $E < U$. Вне барьера уШ имеет вид: $\psi^{(o)''} + 2mE\psi^{(o)}/\hbar^2 = 0$, внутри барьера: $\psi^{(i)''} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi^{(i)} = 0$.

Будем искать решение в виде $\psi = \exp(\lambda x)$: $\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2}E = 0$, $\Rightarrow \lambda = \pm i\alpha$, $\alpha = \sqrt{2mE}/\hbar$. Следовательно, вне барьера волновая функция является суперпозицией падающей и отраженной волн де Броиля: $\psi_{1,2}^o = A_{1,2} \exp(i\alpha x) + B_{1,2} \exp(-i\alpha x)$.

Внутри барьера $\psi^{(i)} = a \exp(\beta x) + b \exp(-\beta x)$, где $\beta = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$. Т.к. в области справа от барьера нет отраженной волны, $B_2 = 0$. Наложим условие непрерывности и гладкости функции ψ : $\frac{d \ln \psi}{dx} = \text{const}$, $\Rightarrow A_1 + B_1 = a + b$, $a \exp(\beta l) + b \exp(-\beta l) = A_2 \exp(i\alpha l)$, $i\alpha A_1 - i\alpha B_1 = \beta a - \beta b$, $\beta a \exp(\beta l) - \beta b \exp(-\beta l) = i\alpha a \exp(i\alpha l)$. Пусть $n = \beta/\alpha = \sqrt{(U_0 - E)/E}$. Тогда получим следующие выражения для коэффициентов отражения и преломления:

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}, \quad D = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2}, \quad R + D = 1.$$

Найдем значение D , используя ГУ: $D \approx \frac{16n^2}{(n^2 + 1)^2} \exp(-2\beta l)$. Обычно опускают множитель $16n^2/(n^2 + 1)^2$, имеющий при малых n порядок единицы. Тогда для D справедлива формула:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right).$$

Т.о., существует ненулевая вероятность прохождения частицы через потенциальный барьера. Это явление называют **туннельным эффектом**.

Для барьеров сложной формы

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U_0 - E)} dx\right).$$

Квазистационарные состояния. Предельный переход к классической физике

В случае слабой зависимости волновой функции ψ от времени, плотность вероятности $|\psi|^2$ также слабо будет изменяться с течением времени. В этом случае можно считать, что в некотором интересующем интервале времени $|\psi|^2 = \text{const}$. Такие состояния называют **квазистационарными**.

Согласно принципу соответствия, при больших квантовых числах все формулы квантовой механики преобразуются в соответствующие выражения классической физики. Действительно, в этом случае квантование энергии происходит квазинепрерывно (т.е. можно считать энергетический спектр сплошным), вероятность проникновения частицы сквозь потенциальный барьер становится равной нулю.

Электрон в периодическом потенциале. Энергетические зоны

Рассмотрим частный случай, когда волновая функция электрона в атоме сферически симметрична (*s*-орбиталь). Этот случай не предусматривался классической теорией Бора, где электрон двигался по плоским орбитам. Однако, в квантовой механике нет никаких препятствий для реализации такого случая (*в квантовой механике вообще нельзя говорить о движении электрона вокруг ядра, можно лишь утверждать, что электрон находится около ядра со сферически симметричной плотностью вероятности $|\psi|^2$*).

Пусть Ze – заряд ядра. Запишем ψ в полярных координатах:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{q}{r} - \beta^2 \right) \psi = 0,$$

где $\beta^2 = -2mE/\hbar^2$, $q = 2mZe^2/\hbar^2$. Будем искать решение в виде $\psi(r) = \frac{u(r)}{r} \exp(-\beta r)$. Получим характеристическое уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2} - 2\beta \frac{du}{dr} + \frac{q}{r} u = 0.$$

Решение характеристического уравнения будем искать в виде ряда $u = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k r^k$, где γ – пока еще не определенная постоянная.

Приравнивая члены с одинаковыми степенями, получим:

$$\gamma(\gamma - 1) = 0, \quad k(k+1)a_{k+1} - 2\beta k a_k + q a_k = 0, \text{ при } k \neq \gamma.$$

Из первого условия получаем, что $\gamma = 1$, иначе ψ – функция при $r = 0$ обращалась бы в бесконечность. Из второго условия получим: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \frac{2\beta}{k+1} a_k$,

т.е. на бесконечности решение ведет себя как экспоненциальная функция, обращаясь в бесконечность. Следовательно, решение должно иметь вид конечного ряда. Пусть при $k = n$, $2\beta n - q = 0$, тогда и все последующие члены ряда будут равны нулю. Следовательно, n -й энергетический уровень определим из условия $2\beta n - q = 0$. Тогда решение будет иметь вид

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2n^2},$$

что совпадает с соответствующей формулой теории Бора.

Соответствующие волновая функция и плотность вероятности примут вид:

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{\pi a_1^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_1}\right), \quad \rho_r = 4\pi r^2 |\psi|^2 = \frac{4}{a_1^3} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_1}\right),$$

где $a_1 = \hbar^2/mZe^2$.

Основы квантовомеханической теории возмущений

Теория возмущений — общий метод нахождения поправок к идеальной системе для нахождения решений для реальной системы. В данном случае гамильтониан системы представляется в виде $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где H_0 — гамильтониан идеальной системы, допускающий точное решение, \hat{V} — малое слагаемое, **оператор возмущения**.

Пусть $\hat{V} = \lambda \hat{W}$, где λ — малый безразмерный параметр. Тогда уШ примет вид $(\hat{H}_0 + \lambda \hat{W})\psi = E\psi$. Представляя волновую функцию как линейную комбинацию собственных векторов базиса \hat{H}_0 , получим: $\psi = \sum a_n \varphi_n$, $(E - E_m^0)a_m = \lambda \sum W_{mn}a_n$, где $W_{mn} = \int \varphi_m^* \hat{W} \varphi dV$, $\hat{H}_0 \varphi_n = E_n^0 \varphi_n$.

Разложим E_m по λ : $E_m = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n E_m^{(n)}$, $a_k = \delta_{km} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a_m^{(n)}$. В первом приближении $E = E_m^0 + \lambda E_m^1 = E_m^0 + \lambda W_{mm} = E_m^0 + V_{mm}$, где $V_{mm} = \int \varphi_m^* \hat{V} \varphi_m dV$. Т.о., в первом приближении поправка к энергии равна среднему значению оператора возмущения. $a_m^1(E_k^0 - E_m^0) = W_{mk}$, $\Rightarrow a_m^1 = \frac{W_{mk}}{E_k^0 - E_m^0}$,

$$\psi_k = \varphi_k + \lambda a_k^1 \varphi_k + \sum_{m \neq k} \frac{V_{mk}}{E_k^0 - E_m^0} \varphi_m = \varphi_k + \sum_{m \neq k} \frac{V_{mk}}{E_k^0 - E_m^0},$$

т.к. $a_k^1 = 0$ (чисто мнимый коэффициент).

Метод теории возмущений определен только в случае, если ряд последовательных приближений сходится, т.е. каждая последующая поправка меньше предыдущей, и $|V_{km}| \ll |E_k^0 - E_m^0|$.

Тождественность микрочастиц. Бозоны и фермионы. Принцип Паули

Квантовая статистика (к.с.) — статистический метод исследования систем большого количества частиц, подчиняющихся квантовым законам.

К.с. строится на принципе **неразличимости** тождественных частиц, т.е. все одинаковые частицы считаются принципиально неразличимыми друг от друга.

Основная задача к.с. — о распределении частиц по координатам и скоростям. Обозначим элемент $\Phi\Gamma d\Gamma = dp_x dp_y dp_z dx dy dz$ — **фазовый объем**. Согласно квантовой механике, число возможных квантовых состояний системы $dN = d\Gamma/h^3$.

Бозоны — частицы с целым спином, подчиняющиеся статистике Бозе–Эйнштейна:

$$f_B = \frac{1}{\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT}\right) - 1},$$

где μ — **химический потенциал**, $\mu = \frac{U - TS + pV}{N}$.

Фермионы — частицы с полуцелым спином, подчиняющиеся статистике Ферми–Дирака:

$$f_F = \frac{1}{\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

Вырождение газов — отступление в поведении бозонных и фермионных газов от классического распределения Максвелла–Больцмана. Вырождение становится существенным при $T \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$. Вырождение характеризуется **параметром вырождения**: $A = \exp(\mu/kT)$. При $A \ll 1$ распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна не отличаются от распределения Максвелла–Больцмана:

$$f = A \exp\left(-\frac{W_i}{kT}\right).$$

Температурой вырождения, $T_{\text{выр}}$ называется температура, при которой вырождение становится существенным. У газов $T_{\text{выр}}$ мала, т.е. при нормальных условиях они подчиняются статистике Максвелла–Больцмана. Фотонный газ всегда вырожден, т.к. у него $T_{\text{выр}} = \infty$. Фотонный газ подчиняется статистике Бозе–Эйнштейна. В вырожденном состоянии находятся и электроны внутри металлов, т.к. для них $T_{\text{выр}}$ значительно превышает нормальную температуру.

Принцип запрета Паули: *в одном и том же квантовом состоянии не может существовать более одного фермиона.* Следовательно, в вырожденном состоянии фермионы занимают все энергетические уровни, вплоть до некоторого E_F .

Бозоны же не подчиняются принципу Паули: в сильно вырожденном состоянии они образуют т.н. **бозе-конденсат** — совокупность бозонов с одинаковыми энергиями.

Принцип неопределенности

Соотношения неопределенностей (С.н.) — фундаментальные соотношения квантовой физики, устанавливающие предел точности одновременного определения канонически-сопряженных динамических переменных, характеризующих квантовую систему: координата — импульс, действие — угол и т.п. Математически С.н. имеют вид неравенств, например, $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$.

С.н. были установлены Гайзенбергом в ходе мысленного эксперимента, поэтому зачастую их называют «соотношения Гайзенберга». Робертсон показал, что С.н. являются следствием **коммутационных соотношений** $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar$ между операторами соответствующих физических величин, причем ΔA и ΔB являются среднеквадратичными отклонениями.

Шрёдингер предложил более общую форму С.н.:

$$\Delta x^2 \Delta p_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(1 - r^2)},$$

где r — коэффициент корреляции операторов \hat{A} и \hat{B} . Для сильно коррелированных состояний «эффективная постоянная Планка», $\hbar/\sqrt{1 - r^2}$ может существенно превышать \hbar .

С.н. имеют место для любых физических величин f и g , которым соответствуют некоммутирующие эрмитовы операторы. Если коммутатор $[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar\hat{c}$, то С.н. имеют вид

$$\Delta f^2 \Delta g^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} |\bar{c}|^2.$$

Среди физических толкований Н.с. можно выделить по крайней мере три уровня. Наиболее часто Н.с. трактуют как *ограничение на экспериментально достижимую точность измерения характеристик квантовых объектов, обусловленное неадекватностью классических приборов целям квантовых измерений*. Другое толкование исходит из того, что С.н. есть следствие внутренних свойств квантовых объектов (корпускулярно-волновой дуализм): *для полного описания квантовой системы равно необходимо учесть как ее корпускулярные, так и волновые свойства*.

Второе толкование значительно шире и представляет собой общий *принцип неопределенности*. Этот принцип является предпосылкой **принципа дополнительности** Бора: *получение экспериментальной информации об одних*

физических величинах, описывающих микрообъект, неизбежно связано с потерей информации о некоторых других величинах, канонически сопряженных с первыми. С.н. с этой точки зрения можно трактовать как способ сохранения классических понятий для описания квантовых систем путем взаимного ограничения области их совместного применения.

Третья трактовка С.н. связана с соотношением $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$. Можно утверждать, что *за ограниченный интервал времени невозможно точно определить энергию системы, или же: неопределенность энергии состояния возбужденной квантовой системы тесно связана с ее временем жизни.*

Из С.н. можно оценить, например, «скорость вращения» электрона вокруг ядра атома водорода в основном состоянии:

$$v \geq \Delta p / m \sim \hbar / mr_0 \sim e^2 / \hbar, \quad \Rightarrow \quad v/c \approx e^2 / \hbar c \approx \alpha \approx 1/137.$$

59 Одноэлектронный атом

Уравнение Шрёдингера с центрально симметричным потенциалом

Рассмотрим движение электрона в кулоновском поле ядра. Наиболее подходящей в данном случае является сферическая СК. Основные операторы примут вид:

$$\hat{U} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}; \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta; \quad \psi(r, \theta, \varphi, t) = \psi(r, \theta, \varphi) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right).$$

Решим стационарное уШ $\hat{H}\psi = E\psi$, где $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$. В сферической СК лапласиан примет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi},$$

т.к. $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

Пусть $k^2 = 2m \frac{E - U}{\hbar^2}$, тогда получим:

$$\left(\Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \right) \psi + k^2 \psi = 0.$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi), \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{r^2 \Delta_r R}{R}}_{=\lambda} + r^2 k^2 = -\frac{\Delta_{\theta, \varphi}}{Y} Y.$$

Для угловых переменных получим: $\Delta_{\theta, \varphi} Y + \lambda Y = 0$. Пусть $Y = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, тогда получим еще два уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \varphi = 0; \text{ и } \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0.$$

Из условия нормировки $\int \psi^* \psi dV = 1$, получим:

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 dr \int_0^\pi |\Theta|^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\varphi = 1.$$

$\Phi = \mathfrak{C} \exp(im\varphi)$, Θ находится посредством полиномов Лежандра, \Rightarrow

$$Y(\theta, \varphi) = \left(\frac{(2l+1)(l-m)}{4\pi(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\varphi).$$

Следует указать, что *решения данного уравнения существуют лишь при $\lambda = l(l+1)$.* Число m называют **магнитным квантовым числом**, а число l – **орбитальным квантовым числом**.

Операторы квадрата импульса и проекции импульса

Оператор квадрата импульса $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$, а т.к. $-\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi} Y = \hbar^2 \lambda Y$, то $\hat{L}^2 Y = \hbar^2 \lambda Y$. Следовательно, собственные значения оператора \hat{L}^2 : $L^2 = \hbar^2 \lambda = \hbar^2 l(l+1)$. $\Rightarrow L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$.

Оператор $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$. $\hat{L}_z^2 \Phi = m^2 \hbar^2 \Phi$, $\Rightarrow L_z = m\hbar$.

Решим теперь радиальное уравнение, зная, что $\lambda = l(l+1)$:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] R = 0.$$

Найдем решение уравнения:

1. $r \rightarrow \infty$: $R'' + \frac{2m}{\hbar^2} RE = 0$, $\Rightarrow R = A \exp(-\varepsilon r) + B \exp(\varepsilon r)$, где $\varepsilon^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$.

Для сходимости решения положим $B = 0$. Тогда $R = A \exp(-\varepsilon r)$.

2. $l = 0$. Пусть $R = A \exp(-\varepsilon r)$, тогда $\varepsilon^2 = \frac{m^2 Z^2 E^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^4}$, $\Rightarrow E = -\frac{mZ^2 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2}$.

3. Теперь будем искать решение полного уравнения в виде $R = f(r) \exp(-\varepsilon r)$:

$$\varepsilon^2 = \frac{m^2 Z^2 e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^4 (l + n_r + 1)^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2},$$

$$E = -\frac{mZ^2 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 (l + n_r + 1)^2},$$

где $n = l + n_r + 1$ – **главное квантовое число**.

Волновые функции стационарного состояния атома водорода

Для основного состояния атома водорода радиальная составляющая волновой функции $R = Af(r) \exp(-\frac{r}{na})$, где a – боровский радиус. Нормируя, получим функцию основного состояния: $\psi_{1s} = \pi^{-1/2} a^{-3/2} \exp(-r/a)$. Максимальная вероятность нахождения электрона на $r = a$. Энергия $1s$ состояния

$$E_{1s} = -\frac{mZ^2 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2}.$$

Вырождение уровней по орбитальному моменту

Если представить электрон движущимся по круговой орбите, он будет обладать магнитным, $\mu = IS = ev\pi r^2 = evr/2$, и механическим, $L = mvr$, моментами.

Гиромагнитным отношением называют величину $\Gamma = \mu/L = -e/(2m)$.

Экспериментально для свободного электрона получено: $\Gamma_s = -e/m$, $\mu = e\hbar/(2m)$, $L_s = \hbar/2$. Величина $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ называется **магнетоном Бора**.

Штерн и Герлах определили экспериментально магнитные моменты атомов. Пучек атомов пропускался через неоднородное МП. На атомы действует сила, зависящая от взаимной ориентации магнитного момента и МП. Оказалось, что μ может иметь любую ориентацию относительно H , однако, оказалось, что угол между этими величинами может иметь только дискретные значения, т.е. *проекция μ на H квантуется*.

Для магнитных моментов атомов получились значения порядка нескольких μ_B , причем у атомов некоторых веществ магнитный момент отсутствовал.

Т.к. механический и магнитный моменты атома связаны, то можно сделать вывод, что в опытах по определению механического момента свободного электрона $L_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{3}\hbar/2$ на самом деле измерялся магнитный момент $L_{sz} = m_s\hbar = \hbar/2$, где m_s – **магнитное спиновое число**, $m_s = \pm 1/2$.

Гипотезу о существовании собственного момента импульса — **спина** — электрона выдвинули Уленбек и Гаудсмит.

Спин–орбитальное взаимодействие

Для электрона $\mu_s/L_s = -e/m_e$, $L_s = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{3}$, $\Rightarrow \mu_s = -2\mu_B\sqrt{3}$, $\mu_{sz} = -\frac{e}{m_e}L_{sz} = \pm\mu_B$.

Если электрон находится в состоянии $l \neq 0$, его спиновый и орбитальный моменты, L_s и L_l , взаимодействуют между собой, образуя **полный момент**: $L_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}$, где $j = \overline{l+s, |l-s|}$. При $l \neq 0$ $j = l \pm 1/2$, в s -состоянии $j = s = 1/2$.

Спин–орбитальное взаимодействие — взаимодействие спинового и орбитального магнитных моментов, благодаря которому образуются состояния с новыми значениями энергии. Т.о., все уровни с $l \neq 0$ у водорода и щелочных металлов расщепляются на дублеты. Амплитуда расщепления i -го энергетического уровня $\Delta E_i = \alpha^2 E_i / 16$, где $\alpha \approx 137$ — **постоянная тонкой структуры**.

60 Многоэлектронные атомы

Общие принципы описания многоэлектронного атома. Атомные оболочки и подоболочки

Эксперименты показывают, что по мере роста номера химического элемента происходит последовательное заполнение электронных состояний атома. Согласно **принципу Паули**, в одном и том же состоянии не может быть более одного фермиона.

Согласно принципу тождественности частиц, волновая функция является симметричной для бозонов и антисимметричной для фермионов.

Принцип Паули объясняет периодичность свойств химических элементов. **Электронная оболочка** — совокупность электронных состояний в атоме с одним значением главного квантового числа n (в порядке возрастания: K , L , M , N, \dots). **Подоболочка** — подгруппа входящих в оболочку электронов с одинаковыми значениями орбитального квантового числа l (в порядке возрастания: s, p, d, f). Полное число электронов в подоболочке $N_l = 2(2l+1)$, а в оболочке — $N_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2$.

Эффективная энергия электрона в приближении центрально симметричного поля складывается из энергии кулоновского поля, экранированного электронами внутренних оболочек, и центробежной энергии.

Оценка показывает, что при возрастании l увеличивается вероятность нахождения электронов ближе к ядру атома.

Необходимо учесть, что поле экранированного ядра оказывается короткодействующим. С другой стороны, эффективная энергия растет с ростом l за счет центробежной энергии. Также необходимо учитывать полное отсутствие центробежной энергии в s -состояниях. Из экспериментов установлено, что энергия состояния $4s$ меньше энергии $3d$, \Rightarrow после $3p$ -орбитали заполняется $4s$, а лишь затем $3d$.

Модель Томаса–Ферми и самосогласованное поле

Модель самосогласованного поля Хартри позволяет свести многоэлектронную задачу к одноэлектронной. Пусть оператор взаимодействия двух электронов \hat{V}_{kl} , тогда энергия l -го электрона

$$V_l(\vec{r}_l) = \sum_{k \neq l} \int \psi_k^* \hat{V}_{kl} \psi_l d\tau_k.$$

УШ в первом приближении поля Хартри: $(\hat{H}_l + \hat{V}_l - E_l)\psi_l^1 = 0$.

Состояние атома рассматривается как совокупность одноэлектронных состояний, при этом учитывается лишь основная часть взаимодействия электронов (т.е. не учитывается спин–орбитальное взаимодействие).

Фок предложил ввести волновую функцию

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \cdots & \psi_1(\xi_z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_z(\xi_1) & \cdots & \psi_z(\xi_z) \end{vmatrix}.$$

Однако, метод Хартри–Фока очень сложен, и его сложность резко возрастает с ростом количества электронов.

Упрощением является **метод Томаса–Ферми**. Он не позволяет объяснить индивидуальные свойства каждого атома, но позволяет исследовать их общие свойства. Суть метода в следующем. В многоэлектронных атомах большая часть электронов находится в состояниях с большими n , дебройлевская длина волны электрона значительно меньше размеров атома. В этих условиях возможно приближение квазиклассического приближения, позволяющее говорить об импульсе электрона как функции его координат. Границные условия: $\psi(R) = A$, $\lim_{r \rightarrow 0} r(\psi(r) - A) = Ze$.

Существенный недостаток метода Томаса–Ферми — в медленном спадании плотности электронов на больших расстояниях от ядра, из-за чего был введен ряд поправок.

Для ионов решение зависит от величины $(Z - N_{\text{электронов}})/Z \neq 0$. Для положительных ионов получаются конечные значения радиуса атома даже без введения поправок.

Электронная конфигурация. Приближение LS - и JJ -связей

Электронная конфигурация — условная запись распределения электронов по энергетическим состояниям, например, для натрия: $1s^2 2s^2 p^6 3s$, что означает, что на первом энергетическом уровне (первая оболочка) присутствуют 2 электрона в s -состоянии, на втором — 2 в s -состоянии и 6 в p -состоянии, на третьем — один электрон в s -состоянии.

Так как внутренние атомные оболочки полностью заполнены, их полный спиновый момент равен нулю. Следовательно, спин атома определяется суммарным спином валентных электронов.

Все электроны обладают спиновым и орбитальным моментами. Наиболее сильным является взаимодействие электронов с атомным ядром, менее сильными — межэлектронные взаимодействия. **Межэлектронные взаимодействия** делятся на два вида:

1. **Рёссел–Саундерсова связь (LS)**. Орбитальные моменты электронов взаимодействуют сильнее между собой, чем со спиновыми моментами. В то же время спиновые моменты связаны между собой сильнее, чем с орбитальными. В итоге суммарный спиновый момент $L_S = \sum L_s$ и суммарный орбитальный момент $L_L = \sum L_l$. Полный момент $L_J = L_S + L_L$. Энергия связи в данном случае зависит от взаимной ориентации частных и суммарных спинов.
2. **JJ -связь**. Если орбитальный и спиновый моменты взаимодействуют сильнее друг с другом, чем с подобными себе, то результирующий спин $L_J = \sum L_j$, где $L_j = L_s + L_l$. Данный вид связи чаще всего наблюдается у тяжелых атомов.

Терм. Тонкая структура терма. Спин и магнитный момент нуклонов и ядра

Условно **терм** (энергетическое состояние электрона) обозначается так: $^{2S+1}L_J$, где $L = \overline{S, P, D, F}$, в зависимости от типа электронной орбиты. Буквы s , p ,

d , f соответствуют английским наименованиям спектральных серий атомов с одним внешним электроном: s — внешняя, p — главная, d — диффузная и f — фундаментальная.

В случае, когда квантовое число $S < L$, **мультиплетность терма** (количество подуровней с разными квантовыми числами J) определяется выражением $2S + 1$, т.к. в данном случае $J = \overline{L - S, L + S}$. Если же $L < S$, мультиплетность определяется числом $2L + 1$.

Магнитный момент атома также разделяется на спиновый, $\mu_S = -2\mu_B\sqrt{S(S+1)}$, и орбитальный, $\mu_L = -\mu_B\sqrt{L(L+1)}$. Проекция орбитального момента $\mu_{Lz} = -\mu_B m_L$. Полный магнитный момент $\mu_J = -\mu_B g\sqrt{J(J+1)}$, где
$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L-1)}{2J(J+1)}$$
 — **фактор Ланде**. Так, при $S = 0$, $\mu_J = \mu_L$, а при $L = 0$, $\mu_J = \mu_S$; $\mu_{Jz} = -\mu_B g m_J$.

За счет существования магнитного момента атома обнаруживается **тонкая структура термов**: во внешнем МП энергетические уровни атома расщепляются на несколько компонент (**эффект Зеемана**).

Эффект Зеемана объясняется тем, что во внешнем МП атом получает дополнительную энергию $\Delta E = -\vec{\mu}_J \vec{B}$.

Правила отбора ($\Delta m_J = 0, \pm 1$ и пр.) накладывают ограничения на электронные переходы. $\Delta\omega_0 = \mu_B B / \hbar = eB/2m_e$ — **лоренцево смещение**.

Нуклоны атомных ядер являются фермионами, т.к. имеют полуцелый спин. Спин ядра $L = \sqrt{I(I+1)}$, где I — **полное квантовое число** атома. Магнитный ядерный момент $\mu_N = e\hbar/2m_p$, где m_p — масса протона. Полный магнитный момент $\mu = g_K L$, где g_K — **гиромагнитное отношение**.

За счет взаимодействия орбитального и спинового моментов ядра и электронной оболочки возникает **сверхтонкая структура** спектра.

Изотопические эффекты. Атомы щелочных металлов. Атом гелия

Вследствие различия значений постоянной Ридберга, R , для разных масс атомного ядра, в спектрах проявляется **изотопический эффект**, связанный с существованием **изотопов** (ядер с одинаковым зарядовым числом, Z , и разными массовыми числами, A , одного и того же химического элемента).

Для смеси изотопов этот эффект состоит в наличии дополнительных спектральных линий к линиям атомов, ядра которых принадлежат изотопу с наибольшей распространенностью. Интенсивности этих линий относятся, как процентные содержания изотопов в веществе, а длины волн смещены друг относительно друга для изотопов с массами M' и M'' на величину $\Delta\lambda/\lambda =$

$m_e(M'' - M')/\frac{1}{2}(M' + M'')$. С другой стороны, $\Delta\lambda/\lambda = (R_1 - R_2)/R_1$, где R_1 и R_2 – постоянные Ридберга для обоих изотопов.

Щелочные металлы. Спектры испускания атомов щелочных металлов состоят из нескольких серий линий. Наиболее интенсивные из них: главная (абсорбционная линия, соответствующая переходу атома в основное состояние), резкая (состоит из резких линий), диффузная (состоит из размытых линий) и основная (сходна с серией водорода).

Особенностью спектров щелочных металлов является то, что аналогичные уровни в различных рядах лежат на неодинаковой высоте. Спектры щелочных металлов испускаются при переходах валентного электрона с одного уровня на другой. Энергия состояния кроме квантового числа, n , зависит также от номера ряда термов. Различные ряды термов щелочных металлов отличаются значениями момента импульса валентного электрона. Энергия валентного электрона в атоме щелочного металла зависит от величины момента импульса электрона.

В более сложных, чем водород, атомах можно считать, что каждый из электронов движется в усредненном поле ядра и остальных электронов. Это поле уже не будет кулоновским (т.е. пропорциональным $1/r^2$), но имеет центральную симметрию. В самом деле, в зависимости от степени проникновения электрона в глубь атома, заряд ядра будет для данного электрона в большей или меньшей степени экранироваться другими электронами, так что эффективный заряд, действующий на рассматриваемый электрон, не будет постоянным. Вместе с тем, усредненное по времени поле, создаваемое электронами, можно считать центрально-симметричным.

Решение уШ для электрона, движущегося в центрально-симметричном некулоновском поле, дает результат, аналогичный результату для водородного атома, с тем отличием, что энергетические уровни зависят не только от n , но и от l . Т.о. в этом случае снимается вырождение по l . Отличие в энергии между состояниями с различными l и одинаковыми n вообще не так велико, как между состояниями с различными n . С увеличением l энергия уровней с одинаковыми n возрастает.

Частота спектральной линии пропорциональна разности термов конечного и начального состояний. Следовательно, спектральные линии серии натрия могут быть представлены в следующем виде:

- резкая серия: $3P \rightarrow nS$ ($n > 4$);
- главная серия: $3S \rightarrow nP$ ($n > 3$);
- диффузная серия: $3P \rightarrow nD$ ($n > 3$);
- основная серия: $3D \rightarrow nF$ ($n > 4$).

Ридберг установил, что термы щелочных металлов с большой степенью точ-

ности можно представить с помощью эмпирической формулы $T(n) = \frac{R}{(n - \alpha)^2}$,

где α – дробное число – ридберговская поправка (**квантовый дефект**). Эта поправка имеет постоянное значение для данного ряда термов. Ее принято обозначать той же буквой, какой обозначен соответствующий ряд термов. Для F -термов эта поправка равна нулю, поэтому основная серия оказывается водородоподобной.

Атом гелия. Уровни энергии и собственные функции в нулевом приближении (при пренебрежении взаимодействием электронов): $E = E_{n1} + E_{n2}$, $\Psi = \psi_{n1} + \psi_{n2}$, где $E_n = -\pi m_e e^4 Z^2 / (n^2 \hbar)$ и ψ_n – водородоподобная волновая функция электрона. В первом приближении теории возмущений нормальное состояние атома гелия вычисляется с учетом энергии взаимного отталкивания электронов, описываемых волновыми функциями нормального состояния водородоподобного типа. Полная энергия основного состояния двухэлектронной системы в нулевом приближении: $E_0 = 2Z^2 E_H$, в первом приближении $E_1 = (2Z^2 - \frac{5}{4}Z)E_H$, где E_H – энергия атома водорода в нормальном состоянии.

Вследствие того, что оба электрона атома гелия неотличимы друг от друга, возникает вырождение уровней энергии, связанное с неразличимостью атомных электронов (обменное вырождение). Общее решение уШ для атома гелия может быть представлено в виде линейной комбинации его частных решений. При учете возмущения, обменное вырождение снимается и двукратно вырожденное состояние расщепляется на два. Средняя энергия возмущения, $\Delta E = \int |\Psi|^2 \frac{e}{r^2} dV_1 dV_2$, при нормировке волновой функции выражается через симметричную и антисимметричную функции.

Существование спина как новой фазовой координаты, приводит к усложнению волновой функции. Обычно из Ψ выделяют отдельно спиновую волновую функцию $S_\alpha(p_s)$:

$$\Psi = \psi(\vec{r}, t) S_\alpha(p_s), \quad \text{где } \alpha = \pm 1/2, \quad S_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha p_s > 0; \\ 0, & \alpha p_s < 0. \end{cases}$$

Спиновая функция обладает определенными свойствами симметрии, для двухэлектронной системы возможны четыре спиновые функции. В соответствии с принципом Паули, полные волновые функции, отвечающие состояниям двухэлектронной системы, должны быть антисимметричными.

Периодическая система элементов. Правила Хунда

Принцип Паули дает объяснение периодической структуре химических элементов. Например, у водорода: $L = 0, S = 1/2, J = 1/2 \Rightarrow$ основным термом является $^2S_{1/2}$. У гелия: $L = 0, S = 0, J = 0$, основной терм — 1S_0 , литий: $L = 0, S = 1/2, J = 1/2, ^2S_{1/2}$ и т.д.

Видно, что при увеличении n периодически происходит повторение термов, у s -элементов: термы $^2S_{1/2}$ и 1S_0 , у p -элементов: $^2P_{1/2}, ^3P_0, ^4P_{3/2}, ^3P_2, ^2P_{3/2}, ^1S_0$ и т.д.

Согласно принципу Паули, разрешены лишь такие термы, для данной конфигурации, у которых значения хотя бы одного из магнитных квантовых чисел m_s и m_l электронов с равными n и l не совпадают.

Правила Хунда

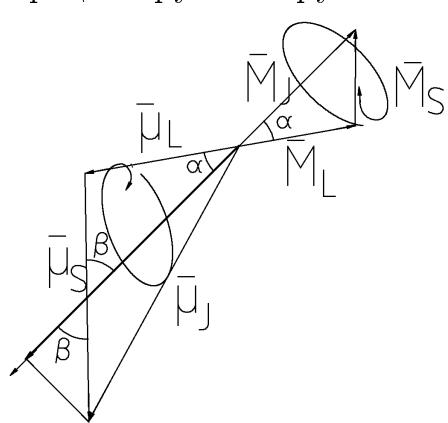
1. Из термов, принадлежащих данной конфигурации, минимальной энергией обладает терм с максимально возможными S и L .
2. Мультиплеты, образованные эквивалентными электронами, являются *правильными* (с ростом J растет энергия), если заполнено не более половины оболочки, и *обращенными* в противоположном случае.

По правилам Хунда и определяются основные термы для данной конфигурации.

61 Атом во внешнем поле

Атом в магнитном поле. Слабое и сильное поля. Фактор Ланде

В **векторной модели атома** механические и электромагнитные моменты изображаются в виде векторов. Пусть M и M_z (некоторый момент атома и его проекция) имеют фиксированные значения, тогда \vec{M} может быть направлен по одной из образующих конуса вокруг оси OZ . Можно предположить, что \vec{M} прецессирует вокруг оси OZ .



Допустим, что вдоль OZ создано МП \vec{B} . С M связан соответствующий магнитный момент $\vec{\mu}$, т.о., \vec{B} посредством $\vec{\mu}$ воздействует на \vec{M} . Чем большей будет величина B , тем большей будет скорость прецессии M .

Если $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, то векторы \vec{M}_1 и \vec{M}_2 будут прецессировать вокруг \vec{M} , который, в свою очередь, прецессирует вокруг оси OZ .

В зависимости от соотношения между взаимодействиями магнитных моментов μ_1 и μ_2 друг с другом и с B могут наблюдаться различные явления:

Слабое поле. $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$. Наблюдаются два вида прецессии: \vec{M}_1 и \vec{M}_2 вокруг \vec{M} и \vec{M} вокруг OZ . Скорость первого вида прецессии будет значительно превосходить скорость второго вида, т.к. взаимодействие магнитных моментов между собой значительно превышает взаимодействие их с МП.

Сильное поле. В данном случае произойдет разрыв связи \vec{M}_1 с \vec{M}_2 . Оба момента будут прецессировать независимо друг от друга вокруг направления внешнего МП.

Подобным образом взаимодействуют между собой спиновый (M_S) и орбитальный (M_L) моменты атома во внешнем МП. Найдем полный магнитный момент μ_J .

Так как магнетизм спинового момента удвоен, векторы $\vec{\mu}_J$ и \vec{M}_J не будут коллинеарны,

$$\langle \mu_J \rangle = -|\mu_L| \cos \alpha - |\mu_S| \cos \beta.$$

$$|\mu_L| = \mu_B \sqrt{L(L+1)}, |\mu_S| = 2\mu_B \sqrt{S(S+1)}; \vec{M}_S = \vec{M}_J - \vec{M}_L, \Rightarrow M_S^2 = M_J^2 + M_L^2 - 2M_J M_L \cos \alpha, \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{M_J^2 + M_L^2 - M_S^2}{2M_J M_L} = \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{L(L+1)}}.$$

Аналогично, т.к. $\vec{M}_L = \vec{M}_J - \vec{M}_S$, получим:

$$\cos \beta = \frac{M_J^2 + M_S^2 - M_L^2}{2M_J M_S} = \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{S(S+1)}}.$$

Таким образом,

$$\mu_J = -\mu_B \sqrt{J(J+1)} \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = -\mu_B g \sqrt{J(J+1)},$$

где $g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ — фактор Ланде.

Эффекты Зеемана и Пашена–Бака

Эффект Зеемана — расщепление спектральных линий в МП. В МП атом приобретает дополнительную энергию $\Delta E = -\vec{\mu}_B \vec{B}$, $\vec{\mu}_J \vec{B} = -\mu_B g m_J$, $\Rightarrow \Delta E = \mu_B g B m_J$.

Для синглетных линий $\Delta E = \mu_B B m_J$ (у них $S = 0$). Тогда при $L = 0$ расщепления не происходит; при $L = 1$ образуется триплет ($\omega_0, \omega_0 \pm \Delta\omega$); при $L = 2$ возможно пять подуровней, но, согласно **правилам отбора**, $\Delta m_J = 0, \pm 1$, \Rightarrow при переходах с уровнем $L = 2$ на $L = 1$ возникает три линии (триплет).

Полученное смещение линий называют **нормальным (Лоренцевым)**:

$$\boxed{\Delta\omega_0 = \frac{e}{2m_e} B}$$

Простой эффект Зеемана наблюдается для линий, не имеющих тонкой структуры (синглетов).

У линий, обладающих тонкой структурой, число компонент превышает три, и смещение подчиняется закону $\Delta\omega = \Delta\omega_0 r/q$, где $\Delta\omega_0$ — расщепление для простого эффекта, r и q — небольшие целые числа. В данном случае эффект Зеемана называют **аномальным**.

Эффект Пашена–Бака наблюдается в сильном МП:

$$\Delta E = \mu_B (m_L + 2m_S) B = \hbar \Delta\omega_0 (m_L + 2m_S).$$

В данном случае правило отбора имеет вид: $\Delta m_S = 0, \Delta m_L = 0, \pm 1$.

Электронный парамагнитный резонанс

Предположим, что на атом в постоянном МП падает ЭМВ с частотой ω . Тогда $\hbar\omega = \delta E = \mu_B g B = \hbar \Delta\omega_0 g$, где δE — расстояние между атомными подуровнями.

Под действием МП падающей волны происходят переходы атома между соседними подуровнями — **электронный парамагнитный резонанс (ЭПР)**.

Т.к. ЭПР зависит от магнитных свойств атома, он возможен только для парамагнетиков. Длина резонансной волны составляет порядка нескольких сантиметров. В состоянии равновесия ЭПР происходит с ослаблением внешнего ЭМП.

ЭПР используется для исследования структуры кристаллов, магнитных свойств атомных ядер.

Атом в электрическом поле. Эффект Штарка

При помещении атома в однородное ЭП с напряженностью E в нем возникает дипольный момент erE , энергия уменьшается на величину $\Delta E = -eZE$, где Z – заряд ядра атома. Возникает расщепление спектральных линий – **эффект Штарка**

Если величина E небольшая, можно воспользоваться методом возмущений. Тогда для атома водорода в первом приближении расщепление линий будет пропорционально E (*линейный эффект Штарка*).

Если поле атома отличается от чисто кулоновского (т.е. для всех атомов, кроме водорода), нельзя останавливаться на первом приближении: эффект будет *квадратичным*, т.е. $\Delta E \propto E^2$.

Теория рассеяния

Постановка задачи: пучек частиц сорта A , полученный от ускорителя, падает на мишень из частиц сорта B .

Зная характеристики A и B до эксперимента, необходимо изучить их после. Если какие-то из характеристик изменяются, можно говорить о произошедшем рассеянии частиц A на мишени.

При столкновении атомов возможны следующие **виды рассеяния**:

1. **упругое**: структура атомов не изменяется, меняются лишь их динамические характеристики;
2. **возбуждение**: часть энергии одного из атомов передается другому;
3. **ионизация**: у одного из сталкивающихся атомов происходит отрыв одного или нескольких электронов.

Любой такой процесс называют **каналом рассеяния**.

Основной характеристикой рассеяния является его **сечение**. Сечения рассеяния, в зависимости от типа процесса рассеяния, делятся на:

- дифференциальное сечение упругого рассеяния (при упругом рассеянии в элемент телесного угла $d\Omega$, построенного вдоль некоторого направления \vec{K});
- полное сечение упругого рассеяния (при упругом рассеянии на любой угол);
- дифференциальное сечение возбуждения (при рассеянии в элемент телесного угла с возбуждением мишени);
- сечение ионизации (при ионизации мишени);
- полное сечение (процесс заключается в том, что рассеяние вообще имело место).

Два типа задач: *прямая* — определить характеристики рассеянных частиц по характеристикам начальных частиц и рассеивающего поля; *обратная* — найти характеристики рассеивающего поля по известным характеристикам рассе-

янных и начальных частиц.

Обычно рассматриваются слабосингулярные поля, т.е. $\lim_{r \rightarrow \infty} |rV(r)| = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} |r^2V(r)| = 0$.

Дифференциальное сечение рассеяния — отношение числа частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ к плотности потока падающих частиц (т.е. это доля частиц, рассеянных в данный элемент телесного угла).

Если величина рассеивающего поля значительно меньше кинетической энергии налетающей частицы, задачу рассеяния можно свести к теории возмущений. Рассеяние можно рассматривать как квантовый переход непрерывного спектра из начального состояния $\vec{p}_a = \hbar\vec{k}_a$, $\varphi_a = \exp(i\vec{k}_a\vec{r})$ в конечное $\vec{p}_b = \hbar\vec{k}_b$, $\varphi_b = \exp(i\vec{k}_b\vec{r})$.

В классическом случае рассеяние характеризуется формулой Резерфорда:

$$\frac{dN}{N} = na \left(\frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}.$$

В случае рассеяния спиновых частиц вводят понятие **парциальных волн** — волн де Броиля, отвечающих определенному значению момента импульса (спина). Волновую функцию частиц можно представить как совокупность парциальных волн.

Каждая парциальная волна представляет собой суперпозицию сходящихся и расходящихся сферических волн. В центрально симметричных полях моменты импульса сохраняются, следовательно, все парциальные волны рассеиваются самостоятельно, независимо от других.

Согласно **оптической теореме**, интегральное сечение рассеяния, σ , связано с мнимой частью амплитуды рассеяния вперед, A : $\sigma = \frac{4\pi}{k} \Im A(\theta)$, $k^2 = 2m_a E/\hbar^2$.

Важная характеристика рассеяния — **фазовые сдвиги**, характеризующие волновую функцию рассеянной частицы ($S_l = \exp(2i\delta_l)$). Их знаки и численные значения реагируют на характер поля и его интенсивность. Фазовые сдвиги зависят и от номера парциальной волны, l , что отражает вклад каждой парциальной волны в сечение рассеяния.

Свойства фазовых сдвигов следующие. Для поля притяжения $\delta > 0$, для поля отталкивания $\delta < 0$. При предельном переходе к классической механике, $\hbar l \rightarrow \rho p$, где p — импульс частицы, ρ — *прицельный параметр*.

В случае «медленных» столкновений решающий вклад в амплитуду рассеяния имеет парциальная волна с $l = 0$.

Эффект Рамзауэра — аномальное (с позиции классической физики) взаимодействие электронов с нейтральными атомами некоторых газов, заключаю-

щееся в резком уменьшении сечения упругого рассеяния электронов при небольших ($\leqslant 1\text{эВ}$) энергиях столкновения. Объясняется этот эффект тем, что при некоторых значениях глубины и размеров потенциальной ямы, создаваемой атомами мишени, она не приводит к рассеянию тех парциальных волн энергия которых такова, что $\operatorname{tg} Kd = Kd$, где $K = k^2 + K_0^2$, $K_0^2 = \frac{2m_bV_0}{\hbar^2}$, где V_0 – глубина потенциальной ямы, d – ее размеры.

62 Химическая связь. Молекулы

Химическая связь

Взаимодействие атомов в молекулах осуществляется валентными электронами. **Валентность** – число электронов, которые атом может отдать или присоединить (чтобы завершить внешнюю электронную оболочку).

Сначала появилось объяснение гетерополярных химических соединений (**теория Косселя**), образующихся благодаря перераспределению электронов во внешних слоях атомов. По этой теории численная величина валентности (гетерополярная) определяется числом электронов, которые атом отдает другому атому (положительная ионная валентность) или получает от него (отрицательная ионная валентность). При образовании молекулы электроны во внешних оболочках атомов перераспределяются так, что валентности атомов насыщаются.

Позднее в исследовании образования молекулы появилась **теория Гайтлера–Ландена**. Согласно ей, при образовании гомеополярной молекулы водорода имеет место взаимная компенсация спинов валентных электронов. Обобщая эти результаты, можно сделать вывод, что образование гомеополярных молекул происходит при условии взаимной компенсации спинов валентных электронов, поэтому подобную валентность иногда называют спиновой.

В случае, если $s + p$ подгруппа (d подгруппа расположена более глубоко, поэтому не учитывается) заполнена менее чем на половину, атом отдает валентные электроны, приобретая положительный заряд; если же она заполнена более чем на половину, атому энергетически выгоднее присоединить электроны другого атома, чтобы дополнить внешнюю орбиталь до восьми электронов.

Простейшая молекула с ковалентной связью – водород. Неразличимость электронов приводит к существованию **обменного взаимодействия**, возникающего между двумя электронами. Следствием этого взаимодействия является обобщение электронов обоих атомов, причем обобщаться электроны могут лишь в том случае, когда их спины направлены противоположно (принцип Паули).

Характеристики химической связи: энергия, длина, прочность и насыщаемость. **Длина связи** – эффективное расстояние между центрами атомов. **Энергия связи** – энергия, необходимая для разрыва химической связи. **Прочность связи** – обратная к длине связи величина. **Насыщаемость связи** – валентные возможности атомов, образующих химическую связь: возможность образования связи определяется числом неспаренных электронов; валентные возможности атомов определяются числом связанных электронных пар.

Молекулярная орбиталь – волновая функция электрона, находящегося в поле атомных ядер и усредненном поле остальных электронов. **Метод молекулярных орбиталей** – метод квантовой химии, основанный на представлении о том, что каждый электрон молекулы описывается своей орбиталью.

Валентные электроны молекулы находятся не в *s*- или *p*-состояниях, а в смешанном *s* – *p*-состоянии. На практике каждую молекулярную орбиталь представляют как линейную комбинацию атомных орбиталей. Построенная таким образом волновая функция молекулы уточняется вариационным методом, что позволяет приблизительно определить энергию состояния молекулы, объяснить некоторые ее свойства и ее структуру.

Адиабатическое приближение

Существует два вида химических связей: **гетеро-** и **гомомолекулярная** (т.е. ионная и ковалентная). В случае ионной связи обобщенная электронная оболочка смещается к одному из атомов. При ковалентной связи атомы обобщают электронную оболочку симметрично.

Теорию квантовомеханического обобщения ковалентной связи разработали Гайтлер и Ланден. УШ для молекулы: $\hat{H}\psi_{ij} = E\psi_{ij}$, где

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1}_{\text{первая молекула}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2}_{\text{вторая молекула}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_e}\sum_{i=1}^N \Delta_i}_{\text{электроны}} + \overbrace{U(\vec{r}_i, R_{ji})}^{\text{энергия взаимодействия}}.$$

Рассмотрим приближение $m \gg m_e$: движение молекулы можно разбить на движение ядер и быстрое движение электронов. $\hat{H} = \hat{T}_R + \hat{T}_r + U$. **Адиабатическое приближение:** ядра считаются совершенно неподвижными. В последующих приближениях можно учесть движение ядер в виде малых поправок: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{T}_R$, где $\hat{H}_0 = \hat{T}_r + U$.

Молекулярные спектры состоят из полос, каждая из которых имеет тонкую структуру. В соответствии с возможными типами движений в молекуле, волновая функция молекулы может быть приближенно представлена в виде

произведения трех функций, отвечающих электронным движениям, колебаниям и вращениям молекулы. В итоге решение уШ будет состоять из трех слагаемых: $E = E_e + E_v + E_r$, где $E_e = U_{0m}(R_{0m})$ – эффективное значение потенциальной энергии; $E_v = \hbar\omega_v(v + 1/2)$ – энергия колебаний в молекуле; $E_r = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu R_{0m}^2} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}$ – вращательная энергия. Здесь I – момент инерции молекулы относительно оси проходящей через ее центр; J – вращательное квантовое число; v – колебательное квантовое число. Из решения получим следующие **выводы**:

1. медленное движение ядер приводит к расщеплению энергетического терма на ряд уровней, характеризующихся своими значениями v и J ;
2. $U(R)$ близка к параболе лишь при $r \ll R_{0m}$ (эффективный радиус молекулы);
3. $E_e \sim 1 \text{ эВ}$, $E_v \sim 0.1 \text{ эВ}$; $E_r \sim 10^{-4} \text{ эВ}$.

В зависимости от энергии молекулы (т.е. температуры вещества) может наблюдаться один из следующих видов спектральных полос: вращательные, колебательно–вращательные и электронно–колебательные.

Молекулярные термы

Электронные термы молекул не отличаются по своему происхождению (хотя их значительно больше) от электронных термов изолированных атомов. Любой атом в молекуле находится в электрическом поле остальных ее атомов. Оно вызывает расщепление электронных уровней атомов в молекуле. Электронные уровни в молекуле образованы из электронных уровней ее атомов, расщепленных на многочисленные подуровни в результате эффекта Штарка во внутримолекулярном поле.

В двухатомных молекулах силовое поле обладает осевой симметрией относительно оси симметрии молекулы. Абсолютное значение проекции общего орбитального момента на эту ось обозначается Λ . Соответственно, термы с $\Lambda = \overline{0, 1, 2, \dots}$ обозначают $\Sigma, \Pi, \Delta, \dots$. Кроме того, каждое электронное состояние должно характеризоваться полным спином, S , всех электронов в молекуле. При заданном значении S возможно $v = 2S + 1$ состояний. Величина v , также как и в атоме, определяет мультиплетность терма.

При смещении из равновесных положений атомов в молекуле могут возникать их колебания около положения равновесия. Они рассматриваются как причина возникновения колебательных спектров молекул. При малых колебаниях молекулы уШ сводится к уравнению гармонического осциллятора. В случае ангармонических колебаний двухатомной молекулы, ее энергетический колебательный спектр будет иметь квадратичный член.

Возможны два основных вида вращения молекул: вращение молекулы как целого вокруг некоторого направления или точки и вращение одних частей молекулы относительно других (внутреннее вращение). Энергетический спектр вращения двухатомной молекулы как целого находится путем решения уШ для жесткого ротатора. При вращении молекулы возникает внутримолекулярное магнитное поле, в котором вырожденные термы, отвечающие значениям $\pm\Lambda$, расщепляются на два.

Электронно–колебательные спектры молекул связаны электронными переходами в атомах молекулы, колеблющихся около своих равновесных положений. Наложение колебательного спектра на электронный проявляется в том, что каждой линии электронного перехода соответствует ряд колебательных линий, образующих **полосу**.

Для электронных спектров молекул существуют **правила отбора**: $\Delta\Lambda = 0, \pm 1$, $\Delta\Sigma = 0$, $\Delta\Omega = 0, \pm 1$, где $\Omega = \Lambda \pm \Sigma$ – внутреннее квантовое число молекулы. Существует **правило рекомбинационного запрета**, согласно которому запрещены комбинации между термами различной мультиплетности.

Электронные переходы в молекулах совершаются настолько быстро, что за время переходов не успевают существенно измениться ни расстояния между ядрами в молекуле, ни их импульсы. Электронные переходы происходят при практически постоянном расстоянии между ядрами. Такой стационарности внешних условий в течение перехода соответствует большая его вероятность, а значит и интенсивность соответствующих спектральных линий (**принцип Франка–Кондона**, вытекающий непосредственно из адиабатического приближения).

В случае незапрещенного электронного перехода вращательно–колебательные спектры молекул образуются при изменении колебательного состояния, которое практически всегда сопровождается изменением их вращательного состояния. Частоты вращательного спектра намного меньше частот колебательного спектра. В результате наложения малых вращательных частот на колебательные, линии колебательного спектра превращаются в полосы, представляющие собой группы вращательных линий. В результате возникает **линейчато–полосатая структура** вращательно–колебательного спектра. При наложении вращательно–колебательного спектра на электронный, влияние вращательного движения существенно лишь при очень больших значениях v и J .

Элементы стереохимии

Стереохимия — область химии, изучающая пространственное строение молекул и влияние его на физические свойства вещества (статистическая стереохимия) и направление и скорость химической реакции (динамическая стереохимия).

мия).

Пространственное строение молекул характеризуется направленностью связи, причина этого — в различном распределении электронных облаков в пространстве. Так, *s*-орбиталь в стереохимии представлена в виде сферы, *p*-орбиталь — гантели. За счет взаимодействия *s*- и *p*-орбиталей атома происходит их **гибридизация** — изменение формы орбиталей. Так, *s* — *p*-орбиталь представляет собой структуру, состоящую из комбинации двух несимметричных гантелиобразных облаков, погруженных друг в друга; *s* — *p*²-орбиталь представляет собой *Y*-образную структуру; *s* — *p*³-орбиталь — тетрагональную структуру.

Взаимодействие молекул с различными формами орбиталей приводит к различию пространственных ориентаций этих молекул. Форма молекул определяет плотность, прочность и прочие физические и химические свойства вещества.

63 Основы квантовой теории твердого тела

Модели твердого тела

ТТ классифицируются по характеру межатомных связей: металлические, ковалентные, ионные и молекулярные. Часто обособляют кристаллы с водородной (типа воды) связью. Также ТТ можно классифицировать по электрическим свойствам: проводники, изоляторы, полупроводники, полуметаллы.

При взаимодействии атомов разных сортов характер химической связи определяется их способностью захватывать или отдавать валентный электрон (**электроотрицательность**).

Из классических моделей ТТ известны приближения свободных и независимых электронов.

В приближении свободных электронов не учитывается влияние положительных ионов на движущиеся электроны в промежутках между их столкновениями. **Теория Друде**: электронный газ не взаимодействует с ионами, в период между столкновениями электронов они обладают одинаковыми скоростями. **Теория Лоренца**: свободные электроны имеют максвелловское распределение по скоростям. **Теория Зоммерфельда**: свободные электроны имеют распределение Ферми–Дирака.

В приближении независимых электронов предполагается взаимодействие электронов с ионами, но не учитывается взаимодействие электронов между собой.

Классические модели не отвечают на вопрос: почему проводимость ТТ меняется в очень широких пределах (одни из тел — проводники, другие — диэлектрики, при определенных условиях возможно возникновение сверхпроводимо-

сти). На данный вопрос способна ответить квантовая теория ТТ — приближение **зонной теории**.

Зоны Бриллюэна. Энергетические зоны

Стационарное состояние электронов в ТТ определяется уШ $\hbar H\psi = E\psi$, $\hbar H = \hbar T + \hbar U$.

$$\psi = \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N); \quad \hat{T} = -\left(\sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + \sum_k \frac{\hbar^2}{2M_k} \Delta_k\right);$$

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \frac{1}{2} \sum_{l,k \neq l} \frac{Z_k Z_l e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 |\vec{R}_k - \vec{R}_l|} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{Z_k e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{R}_k|};$$

где m — масса электрона, M_k — масса ядра вида k , \vec{r} — РВ электрона, \vec{R} — РВ яра.

Согласно **адиабатическому приближению** (которое также называют **приближением Борна–Оппенгеймера**), можно не учитывать энергию взаимодействия ядер. Т.о., волновая функция электронов считается зависимой только от их фазовых координат.

Помимо приближения Борна–Оппенгеймера, используется **валентная аппроксимация**, т.е. воздействие всех электронов внутренних оболочек атома сводится к экранированию кулоновского поля ядра, а уШ решается только для валентных электронов.

Однако, даже воспользовавшись всеми приведенными выше приближениями, оказывается еще невозможным решить уШ. Воспользуемся **первым приближением Хартри–Фока**: потенциальную энергию взаимодействия электронов сведем к сумме взаимодействия отдельного электрона с усредненным полем остальных электронов (такое поле называют **самосогласованным**):

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \longrightarrow \sum_i \tilde{U}_i(\vec{r}_i).$$

Тогда $\hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + \tilde{U}_i(\vec{r}_i) + U_i(\vec{r}_i)$, где U_i — потенциальная энергия i -го электрона в поле атомных ядер. УШ: $\hat{H}\psi = E\psi$, где $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \prod_i \psi_i(\vec{r}_i)$. А т.к. $\hat{H}_i \psi_i = E_i \psi_i$, получим: $E = \sum E_i$.

Чтобы удовлетворить принципу Паули, вводят антисимметричную волновую функцию — **определитель Слэтера**:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\vec{r}_1) & \cdots & \psi_1(\vec{r}_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_n(\vec{r}_1) & \cdots & \psi_n(\vec{r}_n) \end{vmatrix}.$$

Поле \tilde{U}_i называется самосогласованным, т.к. для его нахождения необходимо знать все ψ_i , однако, для нахождения ψ_i необходимо знать \tilde{U}_i . Для решения данной задачи используют вариационные методы.

Пусть $V(\vec{r}) = \tilde{U}(\vec{r}) + U(\vec{r})$. Тогда, т.к. атомы в кристалле расположены строго периодически, можно утверждать, что $V(\vec{r})$ обладает трехмерной периодичностью. Для получения фундаментальных результатов оказывается достаточным знать, что период V совпадает с периодом решетки.

Волновые функции электронов выражаются посредством **функций Блоха**: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = U_{\vec{k}}(\vec{r}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$, где \vec{k} — волновой вектор электрона, $k = 2\pi/\lambda_{dB}$, где λ_{dB} — дебройлевская длина волны электрона, $U_{\vec{k}}$ — периодическая функция.

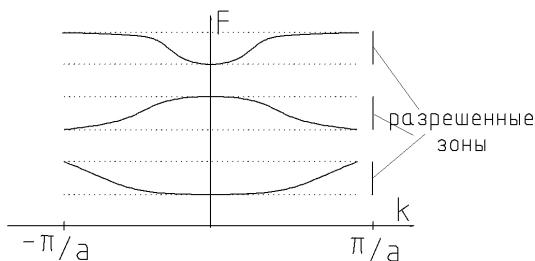
Функции Блоха удовлетворяют условию периодичности: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{n}) = \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$, где $\vec{n} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$ — **вектор трансляции** кристаллической решетки. Волновой вектор $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ связан с импульсом электрона.

Введем понятие **обратной решетки**. Вектор обратной решетки $\vec{H} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$, где $\vec{a}^* = \vec{b} \times \vec{c}/V$, $\vec{b}^* = \vec{c} \times \vec{a}/V$, $\vec{c}^* = \vec{a} \times \vec{b}/V$, V — объем элементарной ячейки кристалла. Объем обратной ячейки $V^* = 1/V$.

По определению, $\boxed{\vec{H}\vec{n} = 1}$. Следовательно, $\psi_{\vec{k}} = \psi_{\vec{k} + 2\pi\vec{H}}$. Т.о., состояния \vec{k} и $\vec{k} + 2\pi\vec{H}$ физически эквивалентны, это означает, что *волновая функция и энергия электрона в кристалле являются периодическими функциями с периодом $2\pi\vec{H}$* .

Если в \vec{k} -пространстве построить решетку $2\pi\vec{a}^*$, $2\pi\vec{b}^*$, $2\pi\vec{c}^*$, то все \vec{k} -пространство можно разделить на области с физически эквивалентными свойствами — **зоны Бриллюэна** (зБ). Первая (основная) зБ — многогранник минимального объема, построенный вокруг начала координат \vec{k} , содержащий все возможные электронные состояния. Последующие зБ строятся так: выбранный за начало отсчета предыдущей зоны узел соединяют отрезками с ближайшими эквивалентными узлами, а затем строят плоскости, проходящие перпендикулярно этим прямым через их середины.

Т.к. кристалл имеет ограниченный объем, \vec{k} может иметь только дискретный ряд значений. Для полного описания всей совокупности состояний электрона в кристалле достаточно рассмотреть только область \vec{k} , ограниченную первой зБ, число k в этой зоне равно числу элементарных ячеек в кристалле.



приведенных зон).

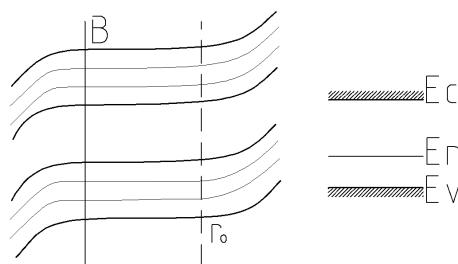
В энергетических схемах удобно также оперировать **эффективной массой электрона**: $m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1}$.

В энергетическом спектре электронов существуют разрывы при $k = n\pi/a$ (на границах зБ). Это объясняется тем, что при таких значениях k выполняются условия Вульфа–Брэгга $n\lambda = 2a$, т.е. функция Блоха представляет собой стоячую волну, т.к. электрон при движении испытывает брэгговское отражение.

Т.о., образуются две комбинации: симметричная и антисимметричная, отвечающие двум уровням энергии — меньшему и большему, в интервале между ними нет ни одного свободного значения энергии электрона (запрещенная зона).

Примеси и примесные уровни. Дефекты

Присутствие дефекта или примеси приводит к возникновению возмущения в периодическом потенциале решетки. Это возмущение локализовано в малой области с центром в \vec{r}_0 , в котором расположен атом примеси или дефект.



Наложение на $V(\vec{r})$ возмущения $U(\vec{r} - \vec{r}_0)$ приводит к отщеплению уровней от разрешенной зоны. Т.о., в запрещенной зоне появляются разрешенные уровни. Электрон с энергией E_L локализован в области возмущения.

Для нахождения простых периодических решений используют **метод эффективной массы**:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta + U(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1}.$$

Для изменения свойств кристаллов зачастую в них специально вводят различные примеси. Так, в полупроводники вводят акцепторные и донорные примеси для формирования различных типов примесной проводимости.

Классификация дефектов: точечные (вакансии, атомы в междоузлиях); линейные (дислокации, микротрещины); поверхностные (границы кристал-



ла, дефекты упаковки, стенки доменов); объемные (микропустоты, вкрапления другой фазы).

Точечные дефекты делятся на дефекты по Френкелю (атом покидает узел, в результате чего образуется вакансия и атом в междоузлии) и по Шоттки (атом покидает кристалл — образуется вакансия). Дислокации делятся на краевые и винтовые. Для характеристики дислокаций вводят понятия **контура** и **вектора Бюргера**.

Статистика носителей заряда. Неравновесные электроны и дырки

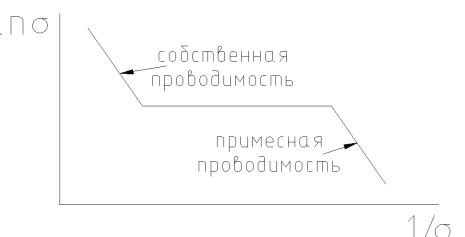
Проводимость полупроводников осуществляется электронами и дырками, $\sigma = e n_e \mu_e + e^+ n_p \mu_p$, где μ — подвижность соответствующего носителя заряда, n — концентрация. Т.к. в собственном полупроводнике $n_e = n_p$, $\sigma = e n (\mu_e + \mu_p)$.

Вероятность нахождения электрона на уровне с энергией E и вероятность нахождения дырки на этом уровне равны:

$$F_n(E) = \frac{1}{\exp(\frac{E-E_F}{kT}) + 1}, \quad F_p(E) = \frac{1}{\exp(\frac{E_F-E}{kT}) + 1}.$$

Если ширина энергетической щели, $\Delta E \ll kT$, электроны и дырки подчиняются распределению Больцмана: $F_n \approx \exp(-\frac{E-E_F}{kT})$, $F_p \approx \exp(\frac{E_F-E}{kT})$. Т.о., при небольших концентрациях электронов и дырок они представляют собой невырожденный электронный газ, аналогичный по своим свойствам классическому идеальному газу.

Уровень Ферми, E_F , собственных полупроводников располагается ближе к зоне проводимости. В примесных же полупроводниках его положение определяется видом и концентрацией примесей. На рис. справа представлен график зависимости логарифма проводимости полупроводника от обратной температуры для примесной проводимости. При малых температурах преобладает примесная проводимость. Затем наступает истощение примесей (все электроны, находящиеся на примесных уровнях, переходят в зону проводимости). После этого при дальнейшем повышении температуры остается только собственная проводимость полупроводника.



Проводимости и кинетические свойства твердых тел

Металлы. Валентная зона занята электронами не полностью (один–два электрона), поэтому, хотя ΔE и велика, проводимость металлов довольно высока за счет заполнения электронами проводимости валентных уровней. Проводимость металлов зависит от температуры: при достаточно высоких температурах происходит рассеяние электронов на фононах (из-за чего проводимость резко уменьшается). При дальнейшем росте температуры концентрация фононов растет, а концентрация электронов остается постоянной (т.к. электронный газ в металле вырожден). Т.о., сопротивление металлов растет линейно в области высоких температур за счет уменьшения подвижности электронов.

При снижении температуры доминирует рассеяние на примесях и дефектах. Подвижность электронов при этом практически не зависит от температуры, поэтому проводимость перестает изменяться при достижении определенной температуры (в некоторых чистых металлах при криогенных температурах возникает сверхпроводимость).

Диэлектрики. В диэлектриках валентная зона полностью заполнена электронами, при этом $\Delta E \sim 10 \text{ эВ}$. В результате диэлектрики очень плохо проводят электрический ток.

Полупроводники. Валентная зона заполнена целиком, однако, $\Delta E \sim 1 \text{ эВ}$, т.е. некоторые электроны могут попасть в зону проводимости. Образуется пара электрон–дырка. Введение примесей образует дополнительный энергетический уровень (у донорных примесей — ближе к зоне проводимости, у акцепторных — к валентной зоне), что приводит к образованию свободных неравновесных носителей заряда — примесной проводимости.

64 Представление о квазичастицах

Фононы, плазмоны, экситоны

Коллективное движение атомов в кристалле представляет собой звуковые волны, а соответствующие им возбуждения — кванты звука — называют **фононами**. Т.о., каждую моду $\omega(\vec{k}, s)$ (где $s = \overline{1, r}$, r — число атомов на элементарную ячейку) можно возбудить целым числом фононов $\hbar\omega(\vec{k}, s)$.

В ТТ возможны как **акустические**, так и **оптические** фононы. Т.к. $\omega_{\text{оптич}} > \omega_{\text{акуст}}$, то и $E_{\text{оптич}} > E_{\text{акуст}}$, т.е. при очень низких температурах могут возбуждаться только акустические фононы.

Введение понятия фононов позволяет рассматривать ТТ как ящик, заключающий в себе фононный газ (фононы подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, т.е. являются бозонами). В результате взаимодействия фононы могут рождаться и исчезать, т.о., число фононов в ТТ не постоянно. При $T \rightarrow 0$ число фононов $N \rightarrow 0$.

Плазмон — квант колебаний плотности плазмы, при которых частицы разных знаков смещаются друг относительно друга, вызывая колебания ЭП в плазме.

Экситон — устойчивая пара электрон–дырка с $E < \Delta E$, т.е. ширины запрещенной зоны (в противном случае электрон станет свободным). Экситоны легко возникают в диэлектриках, где велико значение ширины запрещенной зоны. В полупроводниках энергия экситона мала и экситонные орбиты могут охватывать лишь несколько элементарных ячеек кристалла. В металлах возникновение экситонов в результате поглощения кванта излучения маловероятно.

Экситонные состояния приводят к поглощению излучения в длинноволновой части спектра: $\hbar\omega = \Delta E - E_{EX}/m_e^2$, где ΔE — ширина запрещенной зоны, E_{EX} — энергия экситона.

Экситон Френкеля — экситон с очень малой энергией. Он располагается в пределах одного узла кристаллической решетки. **Экситон Ванье–Мотта** имеет очень большую энергию и его размеры значительно превышают межатомные расстояния.

Конденсация бозонов

ИГ бозонов подчиняется статистике Бозе–Эйнштейна $dn(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}) - 1}$, где $dN(\varepsilon)$ — среднее число энергетических уровней с $E \in (\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$. Для бозонов величина $\mu < 0$, причем $\frac{\partial \mu}{\partial T} < 0$. Следовательно, при уменьшении T $\mu \rightarrow 0$. Максимум μ достигается при некоторой температуре T_0 . Для всех известных бозонных газов она очень мала ($\sim 1 \div 2$ К), но $T_0 \neq 0$, \Rightarrow существует область, где $\mu = 0$. В этой области число частиц, равномерно заполняющих энергетические уровни, N' , меньше полного числа частиц в системе, N . Остальные частицы находятся в особом состоянии на нижнем энергетическом уровне. Т.о., при уменьшении температуры бозе–газ переходит из обычного газообразного состояния в состояние **бозе–конденсата**. Все бозоны занимают нулевой уровень энергии. При этом наблюдаются особые эффекты типа сверхпроводимости.

Электронно–фононный гамильтониан. Сверхпроводимость. Модель БКШ

Микроскопическую теорию сверхпроводимости разработали Бардин, Купер, Шриффер и Боголюбов (**модель БКШ**).

Сопротивление металлов обусловлено взаимодействием электронов с фононами, порожденными колебаниями кристаллической решетки. Такое взаимодействие приводит к рассеянию электронов.

В случае неподвижных ионов, волновая функция электрона выражается через **функцию Блоха**: $\psi_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{k}\vec{r}) U_\pi(\vec{r}) \chi_\sigma$, где χ_σ – спиновая компонента волновой функции. Электронная волновая функция всего металла является несимметричным произведением (определенным) волновых функций каждого электрона, а электронный гамильтониан $\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k},\sigma} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{\alpha}_{\vec{k}0}^+ \alpha_{\vec{k}\sigma}$, где $\hat{\alpha}^+$ – оператор рождения, а $\hat{\alpha}$ – уничтожения фермионов.

Учтем теперь, что при сдвиге иона с \vec{n} на $\vec{\xi}_{\vec{n}}$ энергия взаимодействия электрона с ионом изменяется на $\sum_{\vec{n}} \vec{\xi}_{\vec{n}} (\nabla_{\vec{n}} [W(\vec{r} - \vec{n})])$. В результате получаем **электронно–фононный гамильтониан**:

$$\hat{H}_{\text{вз}} = \int \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \sum_{\vec{n}} \vec{\xi}_{\vec{n}} (\nabla_{\vec{n}} W(\vec{r} - \vec{n})) \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r} = - \int \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \sum_{\vec{n}} W(\vec{r} - \vec{n}) (\nabla_{\vec{n}} \cdot \vec{\xi}_{\vec{n}}) \hat{\Psi} d\vec{r},$$

здесь $\hat{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} \hat{\alpha}_{\vec{k}\sigma} \exp(i\vec{k}\vec{r}) U_{\vec{k}}(\vec{r}\xi_\sigma)$.

Полный гамильтониан системы $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{вз}}$, причем $\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{\alpha}_{\vec{k}}^+ \hat{\alpha}_{\vec{k}}$ + $\sum_{\vec{a}} \hbar\omega_{\vec{a}} \hat{\alpha}_{\vec{a}}^+ \hat{\alpha}_{\vec{a}}$, где $\hat{\alpha}^+$ – оператор рождения, а $\hat{\alpha}$ – оператор уничтожения фононов.

При $T \rightarrow 0$ можно поступить так, как предложил **Фрёлих**: преобразовать \hat{H} с точностью до квадрата параметра электрон–фононного взаимодействия:

$$\hat{H} \approx \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{\alpha}_{\vec{k}}^+ \hat{\alpha}_{\vec{k}} - \sum_{\vec{k}} \nu(\vec{q}) \hat{\alpha}_{\vec{k}}^+ \hat{\alpha}_{-\vec{k}} \hat{\alpha}_{-\vec{k}}^+ \hat{\alpha}_{\vec{k}},$$

где $\vec{q} = 2\vec{k} \neq 0$, $\nu(\vec{q}) = |D(\vec{q})|^2 / (\hbar\omega_{\vec{q}})$. Функцию $D(\vec{q})$ называют **функцией Фрёлиха**, характеризующей электрон–фононное взаимодействие.

Решение уШ показывает, что при определенных условиях между нулевым и первым возбужденным состояниями возникает энергетическая щель, ΔE , т.о., чтобы электроны перешли в основное состояние, они должны отдать энергию $E \geq \Delta E$, электроны приходят в сильно коррелированные состояния и начинают двигаться парами (**куперовские пары**), при этом энергия пары меньше энергии самостоятельных электронов.

В малых ЭП любой процесс одноэлектронного рассеяния будет приводить к разрыву куперовской пары и увеличению энергии электронов, следовательно, процесс рассеяния запрещен, пока полученная извне энергия не превзойдет ΔE .

Сверхпроводимость возникает лишь в металлах с достаточно большой энергией электрон–фононного взаимодействия, \Rightarrow хорошие проводники не могут быть сверхпроводниками, сверхпроводимостью могут обладать лишь плохо проводящие в обычном состоянии металлы (а также некоторые виды керамики).

Сверхтекучесть

Теорию сверхтекучести разработали **Ландау** (на основе представления о квантовых жидкостях) и **Боголюбов** (метод двойного квантования).

В состоянии Бозе-конденсата операторы рождения и уничтожения бозонов становятся коммутативными: $\hat{a}_0\hat{a}_0^+ - \hat{a}_0^+\hat{a}_0 = 0$.

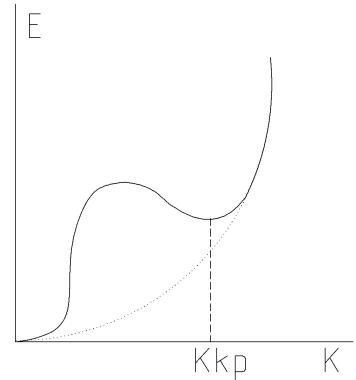
Пусть n_0 – число бозонов в нулевом состоянии. Боголюбов предложил ввести для неконденсированного состояния операторы $\hat{b}_{\vec{k}} = \hat{a}_0^+ n_0^{-1/2} \hat{a}_{\vec{k}}$ и $\hat{b}_{\vec{k}}^+ = \hat{a}_{\vec{k}}^+ n_0^{-1/2} \hat{a}_0$, а для конденсированного состояния, соответственно, операторы $\hat{A}_{\vec{k}}^+$ и $\hat{A}_{\vec{k}}$: $\hat{b}_{\vec{k}} = U(\vec{k})\hat{A}_{\vec{k}} + V(\vec{k})\hat{A}_{-\vec{k}}^+$, где $U^2(\vec{k}) - V^2(\vec{k}) = 1$. Тогда

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) \hat{A}_{\vec{k}}^+ \hat{A}_{\vec{k}},$$

оператор \hat{H}_0 соответствует энергии нулевого состояния.

Характер зависимости $E(\vec{k})$ представлен на рисунке. Штриховой линией обозначена энергия невзаимодействующих атомов.

Энергия бозонов имеет локальный минимум при $k = k_{\text{кр}}$, соответствующем ненулевой критической скорости. Т.о., по теории Ландау, энергия возбуждения при скоростях, меньших критической, является минимальной, и жидкость переходит в сверхтекучее состояние.



Поляроны

Согласно классической теории, переменное ЭМП световой волны вызывает вынужденные колебания связанных зарядов — каждую молекулу среды можно рассматривать как систему осцилляторов с набором собственных частот. Т.к. массы ионов значительно превосходят массу электрона, они совершают заметные колебания только под воздействием излучения в оптическом диапазоне.

Совершая вынужденные колебания, электроны и ионы излучают вторичные волны той же частоты, интерферирующие между собой. Т.о., образуется вторичная волна, совпадающая по направлению с первичной.

Если среда оптически неоднородна, происходит рассеяние излучения. На границе двух сред происходят такие процессы, как отражение и преломление. За счет преобразования энергии ЭМВ в тепловые колебания происходит процесс поглощения излучения.

Поляроны — квазичастицы в диэлектрике — искаженная область решетки, локализованная вокруг электрона (или дырки) проводимости. Под действием ЭП электроны перемещаются вместе с поляризационными областями, возникает поляронная проводимость, характерная для ионных кристаллов.

Т.к. в этом случае электроны проводимости находятся в связанных состояниях, их эффективная масса значительно превосходит соответствующие массы для металлов и полупроводников, что означает значительно меньшую подвижность.

Поляроны большого радиуса возникают, если область искажений значительно больше межатомного расстояния. Искажения решетки при этом невелики, поляроны движутся как свободные заряды.

При сильном электрон–фононном взаимодействии возникают *поляроны малого радиуса* — перемещающиеся прыжками («прыжковая проводимость»). В слабых ЭП прыжковая проводимость не возникает.

Оптические свойства твердых тел

Существуют следующие **виды взаимодействия** ЭМВ с ТТ: с сохранением энергии и с ее превращением. Причем взаимодействие с превращением энергии делится на виды:

1. Пропускание, рассеяние, отражение.

2.

- Неэлектронное: фотолюминесценция, превращение энергии ЭМВ в теплоту, генерация экситонов.
- Электронное: эмиссия электрона, генерация свободных электронов, генерация пары электрон–дырка.

Свойствами пропускания и отражения обладают диэлектрики и полупроводники. В металлах наблюдается почти полное отражение для ЭМВ с частотами, превосходящими плазменную частоту данного металла, т.к. их свойства определяются наличием свободных электронов, за счет которых проводники практически полностью не пропускают свет.

65 Идеальные системы в статистической механике

Статистики Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака

Статистика Бозе–Эйнштейна определяет распределение бозонов по энергетическим уровням:

$$f_B \equiv \frac{dN(E)}{dg_E} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) - 1},$$

где $dN(E)$ – число частиц с энергиами в интервале $(E, E + dE)$, dg_E – число квантовых состояний в данном интервале энергий, $\mu = (U - TS + pV)/N$ – **химический потенциал** (работа, совершаемая в изобарно–изотермических условиях для увеличения на 1 числа N).

Статистика Ферми–Дирака описывает распределение фермионов по энергетическим уровням:

$$f_F = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

Обе функции распределения вероятности можно свести к одной формуле:

$$f_F = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + \delta},$$

где $\delta = 1$ для статистики Ферми–Дирака и $\delta = -1$ для статистики Бозе–Эйнштейна. Если же $\delta = 0$ и $\mu = 0$, получим классическое распределение Максвелла–Больцмана.

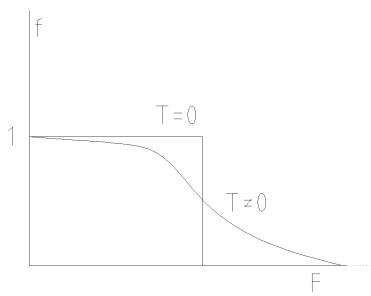
Для статистик фермионов и бозонов характерно, что при малом количестве частиц на одно квантовое состояние они превращаются в распределение Максвелла–Больцмана: $f = A \exp(-E/kT)$. Действительно, это возможно лишь при $(E - \mu)/kT \gg 1$, при этом $E \gg \mu$ и химическим потенциалом (также как и единицей в знаменателе) можно пренебречь.

Ферми–газ при низких температурах. Электронный газ в металлах

Система частиц называется **вырожденной**, если ее свойства, описываемые квантовыми законами, отличаются от свойств классических систем.

Величину $A = \exp(\mu/kT)$ называют **параметром вырождения**. При $A \ll 1$ статистики Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна переходят в статистику Максвелла–Больцмана.

Температурой вырождения, T_B , называется температура, при которой вырождение становится существенным. При $T \ll T_B$ система частиц вырождена, при $T \gg T_B$ она описывается классическими законами.



Число электронов с $E \in (E, E + dE)$ равно $dn_0 = 2f_F dg$. $dg = d\Gamma/\hbar^3 = 4\pi p^2 dp/\hbar^3$, а т.к. $p^2 = 2mE$, $dp = \sqrt{m/2E}dE$, получим:

$$dn_0 = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \frac{\sqrt{E}dE}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

При $T = 0$ заняты все энергетические уровни вплоть до уровня Ферми, $\mu_0 = E_F$. При $T = 0$ $dn_0 = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E} dE$, $\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{3}{5}E_F$. Т.к. $kT_F = E_F$, $T_F \geq 10^4$ К, то при нормальных условиях в металлах $kT/E_F \ll 1$, т.е. электронный газ является вырожденным.

Химический потенциал, $\mu(T) = E_F(1 - \frac{\pi^2}{12}(kT/E_F)^2)$.

Фотонный газ. Бозе–конденсация

Фотоны являются бозонами и подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна. Для фотонного газа необходимо положить $\mu = 0$, тогда

$$f_\gamma = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_\gamma}{kT}\right) - 1}.$$

Т.к. $dN(E) = V \frac{E^2 dE}{\pi^2 c^2 \hbar^2}$ – число энергетических уровней с энергией $E \in (E, E + dE)$. Следовательно, если $u(E)$ – плотность распределения энергии фотонов, то

$$u(E) dE = E dN(E) = \frac{V}{\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{E^3 dE}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1},$$

$$u(E) = \frac{V}{\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{E^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Вообще, для бозонов $\mu < 0$ и $\frac{\partial \mu}{\partial T} < 0$, \Rightarrow при определенной температуре, T_0 , $\mu = 0$. Значит, при $T < T_0$ будет существовать особое состояние — **бозеконденсат** — когда все бозоны занимают нулевое состояние.

Квантовая теория теплоемкости идеального газа с учетом внутренних молекулярных движений

Как уже говорилось ранее, $E_{\text{мол}} = E_{\text{пост}} + E_{\text{эл}} + E_{\text{вр}} + E_{\text{яд}} + E_{\text{кол}}$, т.е. энергия молекулы является суммой энергий поступательного движения, электронов, вращательного и колебательного движения и ядерной энергии. При расчете теплоемкости $E_{\text{яд}}$ и $E_{\text{эл}}$ обычно не учитывают ввиду малости их вклада. $E_{\text{пост}}$ имеет квазинепрерывные значения, $E_{\text{вр}}$ и $E_{\text{кол}}$ квантованы: $E_{\text{пост}} = \hbar\omega(n + 1/2)$, $E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2J}m(m + 1)$. Межуровневые расстояния $\Delta E_{\text{вр}} \ll \Delta E_{\text{кол}}$.

Существенную роль играет расстояние между низшим вращательным уровнем и первым возбужденным, ΔE_0 . В результате столкновений молекул происходит обмен энергией между поступательными, вращательными и колебательными СС. При малых температурах, когда $kT \ll \Delta E_0$, вращательные и колебательные СС не возбуждаются, \Rightarrow молекула ведет себя как частица без внутренних СС. В этом случае теплоемкость, $C_V = \frac{3}{2}R$.

При повышении температуры, $kT \geq \frac{\hbar^2}{2J_0}$, вступают вращательные уровни, и теплоемкость, $C_V = \frac{5}{2}R$. Теплоемкость принимает такое значение вплоть до температуры $T_{\text{кол}} = \frac{\hbar\omega}{k}$, когда $C_V = \frac{7}{2}R$.

66 Физическая кинетика

Микроскопическое состояние системы многих частиц в квантовой и классической теориях

Систему многих частиц можно описать динамическим, либо статистическим методами. Статистические методы имеют более широкое применение (т.к. являются более простыми). Кроме того, можно использовать ТД подход, тогда нас совершенно не будет интересовать строение системы.

Микроскопическое состояние характеризуется $6N$ переменными, которые следует рассматривать как случайные. Любая частица описывается точкой в ФП и характеризуется плотностью вероятности (непрерывной величиной). Часто предполагают, что частицы описываются дискретными величинами, осуществляя таким образом переход к вероятности нахождения частицы в данном элементе ФП, а не к плотности вероятности.

Классическая теория рассматривает микросостояние как состояние совокупности частиц, способных занимать определенное положение в пространстве. Пространство делится на ячейки по размеру частицы. Однако, классическая механика не смогла получить распределение частиц по скоростям.

Квантовая механика показала, что частица занимает в ФП ячейку объемом $2\pi\hbar^3$. Согласно постулату равновероятности, все микросостояния равновероятны. **Эргодическая гипотеза** постулировала равенство среднего по времени и среднего по ансамблю для большого количества частиц.

Теорема Лиувилля и уравнение Лиувилля для классической функции распределения

Воспользуемся эргодической гипотезой, и вместо изучения эволюции системы во времени будем изучать огромное множество одинаковых подсистем, отличающихся только начальным составом (суть **статистического метода Гиббса**). При таком подходе состояние **статистического ансамбля** (т.е. этого множества подсистем) характеризуется «фазовым облаком» — совокупностью точек ФП. При этом все точки движутся независимо.

Перемещение фазового облака можно рассматривать как течение фазовой жидкости. Для него уравнение непрерывности: $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \vec{v})$, где ρ — число частиц в единице фазового объема, \vec{v} — скорость течения фазовой жидкости. Т.к. $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{6N} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \vec{v}_i)$, \Rightarrow

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} (\rho \dot{p}_i) \right) &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left[\dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} + \rho \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Воспользуемся гамильтоновой формой уравнений движения: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, тогда $\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}$, получим **уравнение Лиувилля**:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) = 0.$$

Теорема Лиувилля: *функция распределения вероятностей микросостояний квазинепрерывной подсистемы постоянна вдоль фазовой траектории.*

Из теоремы Лиувилля следует, что объем элемента $\Phi\Pi$, занятого совокупностью фазовых точек, в процессе движения этих точек остается неизменным по величине (хотя форма элемента может меняться): $\Delta\Gamma = \text{const}$. Т.о., движение фазового ансамбля подобно движению несжимаемой жидкости.

Цепочка уравнений Боголюбова для неравновесных функций распределения

Рассмотрим кинетическое уравнение Лиувилля $\frac{\partial\omega}{\partial t} + [H, \omega] = 0$, где $H = H_0 + H_1$, $[H, \omega] = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial\omega}{\partial r_i} + \frac{\partial H}{\partial r_i} \frac{\partial\omega}{\partial p_i}$, $H_0 = \sum_{i=1}^N (p_i^2/2m + U(r_i))$, $H_1 = \sum_{i < j} \Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, $\omega = \omega(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t)$.

Введем, следуя Боголюбову, последовательность корреляционных функций, исходя из уравнения Лиувилля для матрицы плотности, $\frac{\partial\omega}{\partial t} = [H, \omega]_{\text{кл}}$. Тогда получим одночастичную функцию распределения: $F_1(t, \vec{r}_1, \vec{p}_1) = V \int \omega \frac{dq dp}{dr_1 dp_1}$, двухчастичную функцию: $F_2(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = V^2 \int \omega \frac{dq dp}{dr_1 dr_2 dp_1 dp_2}$ и так далее.

Подействуем на уравнение Лиувилля $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial\omega}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial\omega}{\partial q_i} \right)$ оператором $N \int_N d\vec{r}_2 \cdots d\vec{r}_N d\vec{p}_2 \cdots d\vec{p}_N$, учитя, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r_1} &= \frac{\partial H_1}{\partial r_1} - \frac{\partial U(r_1)}{\partial r_1} + \sum_{i=2}^N \frac{\partial \Phi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|)}{\partial r_1}, \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p_1}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r_1} - \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial p_1} &= \frac{N}{V} \sum_{i=2}^N \frac{\partial \Phi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|)}{\partial r_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \left(V^2 \int \omega \frac{dq dp}{dr_1 dr_2 dp_1 dp_2} \right). \end{aligned}$$

Получим первое уравнение цепочки Боголюбова:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial p} = \frac{N}{V} \int \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial F_2}{\partial p} dr' dp'.$$

Итак, получили цепочку уравнений, зацепляющихся через интегральный член: $L_1(F_1) = \Phi_1(F_2)$, $L_2(F_2) = \Phi_2(F_3)$ и т.д. Однако, не все уравнения из цепочки имеют решение, несущее физический смысл.

Основная задача кинетической теории — построение замкнутого уравнения, например, $L_1(F_1) = \tilde{\Phi}(F_1)$, которое называется **интегралом столкновений**.

Важную роль играет **принцип ослабления корреляции**:

$$F_2(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2)|_{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty} \rightarrow F_1(t, \vec{r}_1, \vec{p}_1)F_1(t, \vec{r}_2, \vec{p}_2).$$

Приближение самосогласованного поля. Уравнение Власова

Рассмотрим систему частиц с кулоновским взаимодействием: $\Phi = \pm e^2/R = \Phi(R)$. Будем считать систему в целом электрически нейтральной. Т.к. радиус взаимодействия бесконечен, каждая частица постоянно взаимодействует со всеми остальными, также и все частицы, действуя на данную, создают в точке ее нахождения общее поле, индивидуальные вклады в которое от какой-либо одной из них пренебрежимо малы. Такое поле является самосогласованным. Оно описывается функциями, не чувствительными к нумерации частиц. Корреляционные функции взаимодействия частиц пренебрежимо малы:

$$F_2(t, \vec{r}, \vec{r}', \vec{p}, \vec{p}') = F_1(t, \vec{r}, \vec{p})F_2(t, \vec{r}', \vec{p}') + G_2(t, \vec{r}, \vec{r}', \vec{p}, \vec{p}') = F_1(t, \vec{r}, \vec{p})F_1(t, \vec{r}', \vec{p}').$$

Во взаимодействии лидирует электростатическое. Радиус экранирования (**радиус Дебая**), R_D , оценивается в рамках равновесной теории.

Для реализации самосогласованного поля необходимо участие большого числа частиц внутри сферы радиуса R_D , т.е. среднее расстояние между ними будет значительно меньше R_D , или $v/R_D^3 \ll 1$ ($v = V/N$ – удельный фазовый объем на одну частицу). При этом, чтобы самосогласованное поле не разрушалось индивидуальными корреляциями, расстояние между частицами должно значительно превосходить диаметр частиц (т.е. плазма должна быть достаточно разреженной). Частица должна находиться внутри сферы радиуса R_D достаточно долго по сравнению с временем релаксации.

Ограничиваюсь основным членом F_2 и подставляя его в первое уравнение цепочки Боголюбова, получим интеграл столкновений вида

$$\Phi_1(F_2) = \frac{\partial \tilde{U}(t, r)}{\partial r} \frac{\partial F_1(t, \vec{r}, \vec{p})}{\partial p},$$

где $\tilde{U} = \frac{1}{v} \int \Phi(|\vec{r} - \vec{r}'|) F_1(t, \vec{r}, \vec{p}) d\vec{r}' d\vec{p}'$ – потенциал самосогласованного поля. $\frac{N}{v} \int F_1 d\vec{p}' = n(t, \vec{r}')$, \Rightarrow получим **уравнение Власова**:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r} - \frac{\partial(U + \tilde{U})}{\partial r} \frac{\partial F_1}{\partial p} = 0.$$

Плазменные колебания

Дальнодействующий характер кулоновских сил взаимодействия определяет существование в плазме свободных колебаний. Созданное в некоторый момент времени изменение плотности электронов в плазме не релаксирует, как плотность в обычном газе, а колеблется с определенной частотой, зависящей только

от концентрации электронов (т.к. изменение плотности электронов вызывает возникновение объемного заряда).

Рассмотрим параллелепипед $dV = S dx$. Т.к. массы ионов довольно велики, будем считать их неподвижными. Пусть электрон претерпевает смещение $\xi(x)$. Тогда возникнет объемный заряд

$$dq = enS\xi(x) - enS\xi(x+dx) \approx -en\frac{d\xi}{dx} = -en\frac{d\xi}{dx} dV, \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{dq}{dV} = -en\frac{d\xi}{dx}}.$$

Уравнение движения электрона имеет вид $m\ddot{\xi} = -ne^2\xi, \Rightarrow \ddot{\xi} + ne^2\xi/m = 0, \xi = \xi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{ne^2}{m}}$ – **ленгмюровская частота** (частота возникающих в плазме электронных колебаний). Наличие колебаний в плазме было установлено Рэлеем и Ленгмюром.

Уравнение кинетического баланса. Принцип детального равновесия

Благодаря движению частиц, поле, созданное системой, флюктуирует — движение частицы оказываются стохастическим (т.е. вероятностным).

Пусть $W(y, x|\tau, t)$ — плотность вероятности перехода частицы из точки x в точку y за время τ , t — время выхода точки из x . Тогда вероятность перехода $dw = W(y, x|\tau, t) dy$. Если переход $x \rightarrow y$ не зависит от предыстории системы, процесс называется **марковским**.

Введем **принцип детального равновесия**: будем считать вероятности прямого и обратного переходов одинаковыми (т.е. считаем физические законы симметричными относительно замены $t \rightarrow -t$).

Разложим W при малых τ по степеням τ , ограничившись двумя первыми членами: $W(y, x|\tau, t) \approx \Phi(y, x, t) + \tau P(y, x, t)$, где P — вероятность перехода $x \rightarrow y$ за единицу времени; Φ — вероятность «мгновенного» перехода. Т.к. за время $\tau = 0$ частица не может покинуть x , $\Phi(y, x, t) = A(y, t)\delta(y - x)$. $\int W dy = 1, \Rightarrow A(x, t) = 1 - \tau \int P(y, x, t) dy, \Rightarrow$

$$W(y, x|\tau, t) = \left(1 - \tau \int P(z, y, t) dz\right) \delta(y - x) + \tau P(y, x, t).$$

Выясним связь W с функцией $f(\vec{r}, \vec{p}, t) = f(x, t)$. Пусть при $t = 0$ $f = f(x, 0)$. Для изменения числа частиц в dx за время t имеем:

$$[f(x, t) - f(x, 0)] dx = dx \int [W(x, z|t, 0) f(z, 0) - W(z, x|t, 0) f(x, 0)] dz.$$

Т.к. $\int W dz = 1$, получим: $f(x, t) = \int W(x, z|t, 0)f(z, 0) dz$. Перепишем последнее уравнение как $f(y, t_\tau) = \int W(y, x|\tau, t)f(x, t) dx$. Подставляя W и переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$, получим **уравнение кинетического баланса**:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int [P(x, z, t)f(z, t) - P(z, x, t)f(x, t)] dz.$$

Левая часть уравнения — изменение плотности числа частиц в точке x в момент времени t за единицу времени, обусловленное приходом в эту точку частиц из остальных точек (первое слагаемое) и уходом частиц (второе слагаемое).

Можно перейти от классического определения к квантово-механическим дискретным состояниям:

$$\frac{dN_i}{t} = \sum_{i \neq j} (P_{ij}N_j - P_{ji}N_i).$$

Если система замкнута, имеет место принцип детального равновесия: $P(x, y, t) = P(y, x, t)$, или $P_{ij} = P_{ji}$.

Уравнение Дирака

Уравнением Дирака называют квантовое уравнение для частиц с полуцелым спином, полученное из следующих требований:

1. уравнение для волновой функции частицы $\psi(x, t)$ должно быть линейным, чтобы выполнялся принцип суперпозиции состояний;
2. в уравнение должна входить первая производная ψ по времени, чтобы задание ψ в начальный момент определяло волновую функцию в любой другой момент времени;
3. уравнение должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца;
4. величина $\psi^* \psi$ должна иметь смысл плотности вероятности нахождения частицы в точке x в момент времени t ;
5. уравнение для свободной частицы должно быть построено так, чтобы состояние с импульсом \vec{p} и энергией E было его решением только в случае выполнения соотношения $E^2 = \hbar^2 p^2 + m^2 c^4$, или, в системе $\hbar = 1$, $c = 1$: $E^2 = p^2 + m^2$.

Всем этим требованиям удовлетворяет система решений четырехмерной волновой функции $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$.

Ковариантный вид уравнений Дирака зависит от выбора метрики пространства-времени. Если $x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - \vec{x}^2$, где $g_{\mu\nu}$ — метрический

тензор, то уравнение имеет вид:

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

где γ – **матрицы Дирака**. Для четырехмерного вектора тока $j^\mu = \psi^* \gamma^\mu \psi$ вытекает уравнение непрерывности: $\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$.

Для данного импульса \vec{p} уравнение Дирака имеет четыре линейно независимые решения: два с положительной энергией $E = p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ и два с отрицательной энергией $E = -p_0$. Их можно записать в ковариантном виде

$$\psi_{\pm p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u(\pm p) \exp(\mp ipx),$$

где $u(p)$ удовлетворяет уравнениям $(\hat{p} \mp m)u(\pm p) = 0$, $\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \gamma^\alpha p^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$; $u^*(\pm p)(\hat{p} \mp m) = 0$.

Для каждой пары $u-u^*$ в качестве независимых могут быть выбраны решения с определенной спиральностью (проекцией спина на направление импульса) $\lambda = 0, \pm 1/2$. Для $\lambda = 0$ решения свободного уравнения Дирака являются собственными функциями матрицы $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$:

$$\gamma^5 u_\lambda(\pm p) = \mp 2\lambda u_\lambda(\pm p).$$

Решения уравнения Дирака с отрицательной энергией показались лишенными смысла. Для устранения неопределенности их смысла Дирак предположил, что состоянием с минимальной энергией (вакуумным состоянием) является состояние, в котором все уровни с отрицательной энергией заполнены. Если из вакуума «вырвать» одно состояние (т.е. образовать в нем «дырку Дирака»), полученное состояние будет иметь положительную энергию. Эта частица будет иметь массу, равную массе электрона и заряд $+e$ (позитрон). По существу, решения с отрицательной энергией требуют выхода за рамки одночастичного уравнения и осуществляются только в квантовой теории поля.

67 Свойства атомных ядер

Опыт Резерфорда. Распределение зарядов в ядре

Томсоном была предложена статическая модель атома (положительно заряженный шарик с электронами внутри). Исследования Резерфорда по рассеянию α -частиц при прохождении ими через газы и металлические фольги показали несостоятельность модели Томсона.

Опыты Резерфорда, Гейгера и Марсдена — наблюдения треков α -частиц в камере Вильсона — показали, что эти частицы проходят большое расстояние, не испытывая заметных отклонений, \Rightarrow атом является весьма прозрачным для α -частиц (а не заполнен зарядом и массой). Отклонение некоторых частиц на углы $> 90^\circ$ показало, что атом внутри имеет чрезвычайно сильное ЭП, сосредоточенное в небольшой ($\sim 10^{-14} \div 10^{-15}$ м) области в центре атома (т.е. в его **ядре**).

Резерфорд получил формулу для дифференциального сечения рассеяния α -частиц:

$$d\sigma = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{mv_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

а т.к. $d\sigma = 2\pi b db$ (где b – прицельный параметр), то экспериментально замеряя углы θ , можно найти b .

Заряд ядра положителен и кратен заряду электрона: $q = Ze$. Т.о., Z – число положительно заряженных частиц (**протонов**) в составе ядра.

Опыты по рассеиванию быстрых электронов на атомных ядрах показали, что плотность заряда распределена в ядре неравномерно.

Общие размеры ядра характеризуют **среднеквадратичный** (усредненный по плотности заряда) и **эквивалентный** (радиус шарика с равномерно распределенным зарядом, Ze) **радиусы**. Ср. кв. радиус:

$$a^2 = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \rho(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \rho(\vec{r}) 4\pi r^2 dr.$$

Экв. радиус: $R_\Theta = a\sqrt{5/3}$.

Наиболее универсальной моделью распределения заряда в ядре является **однородная модель Ферми**:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp \frac{r - R_{1/2}}{\delta}},$$

где δ – некоторый параметр, $R_{1/2}$ – **радиус половинной плотности** ($\rho(R_{1/2}) = \rho_0/2$).

Для легких ядер более подходит **гауссова модель**:

$$\rho(r) = \left(\frac{3}{2\pi a^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{3r^2}{2a^2} \right).$$

Выводы экспериментов:

1. во внутренних оболочках $\rho = \text{const}$, на периферии ρ спадает по закону Ферми. В легких ядрах заряд распределен согласно гауссовой форме, в тяжелый ядрах – согласно форме Ферми;
2. скорость спадания, δ , для всех ядер приблизительно одинакова: $\delta \cong 0.55 \text{ fm}$;
3. $R_{1/2}$ и R_Θ пропорциональны $\sqrt[3]{A}$, где A – массовое число ядра;
4. в легких ядрах нейтроны и протоны распределены одинаково, в тяжелых же протоны концентрируются ближе к центру ядра, оболочка состоит из нейтронов.

Масса и энергия связи ядра

В теоретической физике масса ядра измеряется в энергетических единицах, в прикладной оперируют атомными единицами массы (а.е.м.). Массы протона и нейтрана порядка 1 а.е.м., т.о., масса ядра пропорциональна массовому числу. Однако, $\sum(m_p + m_n) \neq m_{\text{ядра}}$. **Дефект массы:** $\Delta = m_{\text{ядра}} - A$. **Упаковочный коэффициент:** $f = \Delta/A$. **Энергия связи:** $E_{\text{св}} = -(m_{\text{ядра}} - [Zm_p + Nm_n]) = -(M - [Am_n - Z\Delta m_N])$, где $\Delta m_N = m_n - m_p$. Энергия связи – это энергия, которая выделяется при объединении свободных нуклонов в ядро.

Нуклиды – группы ядер. В зависимости от соотношения $A-Z$ выделяют **изотопы** (нуклиды с одинаковыми Z), **изобары** (нуклиды с одинаковыми A), **изотоны** (нуклиды с одинаковыми $N = A - Z$), **зеркальные** (нуклиды с одинаковым **нейтронным избытком** $T_\zeta = \frac{1}{2}(N - Z)$).

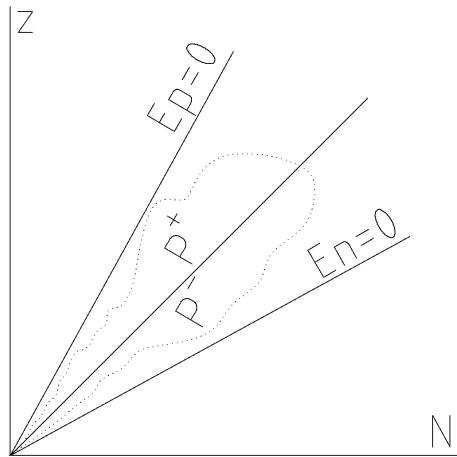
Стабильные и радиоактивные ядра

Атомные ядра делят на стабильные и нестабильные (радиоактивные). **Стабильными** называют ядра, у которых спонтанный распад и превращения являются энергетически невозможными. Например, у стабильных ядер $A < 36$, $T_\zeta \leq 1$. На плоскости $N-Z$ стабильные ядра располагаются в окрестности кривой устойчивости, в начале кривой $N/Z = 1$, в конце $N/Z = 1/6$.

Различие стабильности изотопов находится в зависимости от четности N и Z , а также от величины A . Наиболее стабильны четно–четные ядра (четные Z и N); четно–нечетные и нечетно–четные менее стабильны; наименее стабильными являются нечетно–нечетные ядра (из них стабильны только ядра с $Z = N$).

Нестабильность ядер делят на два вида: по отношению к группам нуклонов и по отношению к изменению заряда ядра.

Виды радиоактивности: испускание α -частиц, β^\pm -распад, K -захват (электронный захват из K -слоя), сопровождающиеся γ -излучением, деление ядра на два осколка, испускание нейтрона.



Критерием устойчивости является линия $Z = A/(1.98 + 0.015A^{2/3})$. Линии $E_n = 0$ и $E_p = 0$ — испускание нейтрона или протона соответственно.

Квантовые характеристики ядерных состояний. Спин ядра. Статические мультипольные моменты ядер

В теории атомного ядра волновые функции характеризуются **четностью**. Пусть оператор \hat{P} меняет знаки координат: $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$. Тогда, если $\hat{P}\psi(\vec{r}, t) = \psi(-\vec{r}, t)$, волновая функция ψ является четной, если же $\hat{P}\psi(\vec{r}, t) = -\psi(-\vec{r}, t)$, — нечетной.

Четность состояния частицы, находящейся в центральносимметричном поле и обладающей внутренней четностью, ξ , и орбитальным моментом, l , равна $\lambda = (-1)^l \xi$. Четность системы $\lambda = n\lambda_k$. Параметр $(-1)^l$ характеризует **орбитальную четность, внутренняя четность, ξ** , является четностью частицы в СК, связанной с ней. Большинство процессов протекает с *сохранением четности*.

Протоны и нейтроны обладают полуцелым спином, s . Полный момент инерции нуклона $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$, $j = |\vec{l} - \vec{s}|, l + s$, а т.к. $s = 1/2$, то $j = l \pm 1/2$.

Атомное ядро обладает **полным моментом импульса** $\vec{J} = \vec{L} + \vec{I}$, где \vec{I} — суммарный спиновый момент нуклонов (**спин ядра**).

Ядро определяется волновой функцией ψ_{IM} : $\hat{I}^2\psi_{IM} = I(I+1)\psi_{IM}$, $\hat{I}_Z\psi_{IM} = M\psi_{IM}$, где $M = \pm 1/2, \dots, \pm I$ (или $M = 0, \dots, \pm I$), $I = n/2$, где $n > 0$.

Закономерности:

1. у ядер с четным A I целые, у ядер с нечетным A — полуцелые;
2. в основном и возбужденном состояниях спин может быть разным;
3. спины всех четно-четных ядер в основном состоянии равны нулю;
4. спины стабильных ядер лежат в интервале $[0, 9/2]$.

Система частиц с зарядами q_i может обладать **электрическими моментами** всех порядков, начиная с нулевого, входящими в члены мультиплексивного разложения энергии взаимодействия системы с внешним ЭП. *Нулевой момент* — полный заряд ядра, $Q = \sum q_i$, $E^{(0)} = Q\varphi$. *Первый момент* — дипольный момент, $\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$, $E^{(1)} = \vec{p} \cdot (\nabla\varphi) = -\vec{p} \vec{E}$. *Второй момент* — квадрупольный, $Q_{ij} = \sum_n q_n (3x_i^n x_j^n - r^2 \delta_{ij})$, $E^{(2)} = -\frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_{ji}}$.

Кроме того, у ядра существуют **магнитные моменты**, главный из них — дипольный: $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \sum q_i |\vec{r}_i \times \vec{v}_i|$, $E^{(1)} = -\vec{\mu} \vec{B}$. *Дипольный магнитный момент*

любого ядра в основном состоянии равен нулю. $\vec{\mu} = \vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n + \vec{\mu}_l$, $\vec{\mu}_p = g_p \mu_{яд} \vec{s}$, $\vec{\mu}_n = g_n \vec{\mu}_{яд} \vec{s}$, $\vec{\mu}_l = g_l \mu_{яд} \vec{l}$, $\Rightarrow \vec{\mu} = g \mu_{яд} \vec{I}$.

Квадрупольный магнитный момент ядра делят на внутренний (в собственной СК), Q_0 , и внешний (в лабораторной СК), Q . Такое различие связано с прецессией Q_0 вокруг некоторой оси. Для большинства ядер $Q_0 > 0$. Внешние квадрупольные моменты ядер с $I = 0$ и $I = 1/2$ равны нулю вне зависимости от значения Q_0 . Всегда $Q < Q_0$. У многих ядер Q_0 довольно велики, что свидетельствует о резко несферической форме ядра.

Радиоактивность. Законы радиоактивного распада. Статистический характер распада

Радиоактивность (РА) — самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождающееся испусканием элементарных частиц. РА делят на естественную и искусственную.

Простой РА распад — такой распад, при котором распадается ядро, не являющееся продуктом РА распада.

Уменьшение количества нераспавшихся ядер происходит по закону $dN = -\lambda N dt$, $\Rightarrow N = N_0 \exp(-\lambda t)$. Вычислим **период полураспада** (время, за которое распаду подвергается половина первоначального количества РА вещества): $N_0/2 = N_0 \exp(-\lambda T_{1/2})$, $\Rightarrow T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$. **Среднее время жизни ядра**, $\tau = 1/\lambda = T_{1/2} / \ln 2$, $\Rightarrow N = N_0 \exp(-t/\tau)$. Единицу ядерной активности называют Беккерель (1 распад в секунду).

Активность РА распада: $A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N$, $\Rightarrow A = \lambda N_0 \exp(-t/\tau)$.

Сложный РА распад — такой распад, при котором распадается ядро, в данный момент являющееся продуктом распада: $N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \dots$. Описывается двумя ДУ: $\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$, $\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$, \Rightarrow

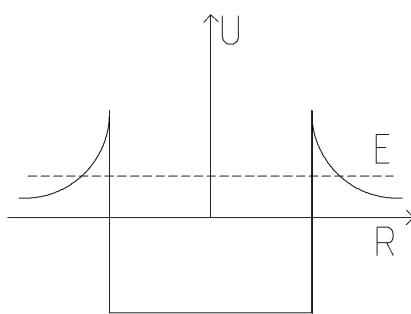
$$\begin{cases} N_1 = N_{10} \exp(-\lambda_1 t), \\ N_2 = N_{20} \exp(-\lambda_2 t) + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]. \end{cases}$$

Если $T_{1/2}^{(1)} \gg T_{1/2}^{(2)}$ ($\lambda_1 \ll \lambda_2$) и $T \ll T_{1/2}^{(1)}$, то приближенно получим: $N_1 = N_{10}$. Пусть $N_{20} = 0$, $\Rightarrow N_2(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} (1 - \exp(-\lambda_2 t))$. $\lim_{t \rightarrow \infty} N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} = \text{const}$, $\Rightarrow \boxed{\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2}$ — **вековое равновесие**.

α -распад. Спектр α -распада показывает, что у ядер существует энергетическая структура по аналогии с атомной. Существует сильная нулевая линия и ряд боковых. **Закон Гейгера–Неттоля:** $\ln \lambda = AB \ln R_\alpha$, где R_α — пробег α -частицы.

β -распад. К данному виду распада относятся β^- и β^+ распады и K -захват. ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + e + \tilde{\nu} - \beta^-$ -распад; ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + e^+ \nu - \beta^+$ -распад; ${}_Z^AX + e \rightarrow {}_{Z-1}^AX + \nu - K$ -захват.

Спонтанное деление. ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-Z_1}^{A-A_1}X_1 + {}_{Z_1}^{A_1}X_2$,
 $A_1 \approx A/2$, $Z_1 \approx Z/2$.



Экспериментальное доказательство существования нейтрино

Паули предположил, что существует нейтральная частица с нулевой массой, появляющаяся в результате β -распада. Существование нейтрино первым подтвердил Аллен в реакции K -захвата лития, исследуя энергию отдачи ядра, затем — в ${}^{37}Ar$.

Рейнес и Коуэн зарегистрировали нейтрино непосредственно с помощью реакции K -захвата: вблизи реактора установили водородный сцинтиллятор с добавкой кадмия — первое прямое доказательство существования нейтрино.

Для характеристики нейтрино, ν , и антинейтрино, $\tilde{\nu}$, ввели понятие лептонного заряда, L , ($L = +1$ для e^- , μ^- и ν ; $L = -1$ для e^+ , μ^+ и $\tilde{\nu}$; $L = 0$ для остальных). У нейтрино обнаружена спиральность.

Затем было открыто несохранение четности в слабом взаимодействии, что позволило описать поведение нейтрино более простыми уравнениями. Было установлено, что нейтрино является левовинтовым ($s_\nu = -1$), а антинейтрино — правовинтовым ($s_{\tilde{\nu}} = 1$).

Позднее, помимо электронного нейтрино были обнаружены мюонное и тауонное нейтрино. Это послужило причиной введения тауонного и мюонного зарядов: $L = L_e + L_\mu + L_\tau$.

Оценка массы нейтрино показала, что их средняя масса не превышает $30 \div 40$ эВ. Аргументом в пользу ненулевого значения массы нейтрино является «скрытая масса» гало галактики. Наличие массы нейтрино объяснило бы также формирование сверхскоплений галактик.

Космология, в зависимости от средней плотности Вселенной, прогнозирует несколько исходов ее эволюции. С этой точки зрения очень важно иметь представление о точном значении массы нейтрино. Так, если $m_\nu \gtrsim 30$ эВ, то плотность Вселенной превосходит критическую плотность, и Вселенная будет пульсирующей, либо коллапсирующей.

Несохранение четности в распаде

Четность, λ , связана с преобразованием пространственной инвариантности. Если четность сохраняется, то данный процесс является зеркально симметричным, т.о., закон сохранения четности связан с зеркальной симметричностью пространства, т.е. $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$.

Исследование реакций с учетом слабого взаимодействия (например, β -распад) показало, что четность в них не сохраняется.

Особенной ярко зеркальная асимметрия проявляется в свойствах нейтрино: все нейтрино обладают отрицательной спиральностью, а все антинейтрино – положительной. Но при пространственной инверсии знак спина инвертируется: «зазеркальных» нейтрино и антинейтрино в нашем мире не существует.

Электронные и магнитные переходы

Переход из возбужденного состояния в основное может сопровождаться испусканием γ -излучения (ультракоротковолновые ЭМВ). Волновые свойства γ -частиц проявляются очень слабо, значительно сильнее проявляются их корpusкулярные свойства.

Энергия, излучаемая системой, может быть разложена на следующие части: электрическое дипольное, электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучения.

При γ -излучении существует ограничение на волновые функции — **правила отбора**:

- для дипольного ЭП: $\Delta l = \pm 1, \Delta m = 0, \pm 1, \Delta j = 0, \pm 1$ (исключая переходы $0 \rightarrow 0$);
- для дипольного МП: $\Delta j = 0, \pm 1$;
- для квадрупольного ЭП: $\Delta j = 0, \pm 1, \pm 2$, запрещенными являются переходы $0 \rightarrow 0, \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ и $0 \rightleftarrows 1$.

Внутренняя конверсия

Возбужденное ядро может перейти в основное состояние еще и посредством внутренней конверсии, или конверсии с образованием электрон–позитронных пар. Явление **внутренней конверсии** на атомных электронах состоит в том, что в тяжелых возбужденных ядрах испускаются группы моноэнергетических электронов из внутренних слоев (K, L, M) электронной оболочки атома. В отличие от электронов β -распада, конверсионные электроны имеют линейчатый спектр.

Электроны конверсии возникают путем прямой передачи энергии электрону от ядра. Т.к. на место дырки во внутренней оболочке переходит электрон с более высокого уровня, возникает характерное рентгеновское излучение.

Парциальный коэффициент внутренней конверсии: $\omega_K = N_K/N_\gamma$, где N_K – число электронов на К-оболочке, N_γ – число испущенных оболочкой γ -квантов. Аналогично рассчитываются парциальные коэффициенты для L и M оболочек. **Полный коэффициент внутренней конверсии** $\omega = \sum \omega_i$.

Если энергия возбуждения ядра $E^* > 2m_e c^2$, может возникнуть электрон–позитронная пара. Т.к. ядро заряжено положительно, энергия образовавшихся частиц различна.

Эффект Мёссбауэра

Эффект Мёссбауэра — испускание или поглощение γ -квантов атомными ядрами в твердом теле, не сопровождающееся изменением колебательной энергии тела, т.е. испусканием или поглощением фононов. Данный эффект аналогичен эффекту резкого поглощения света возбужденными атомами, но, в связи с тем, что на ядро действует отдача, $E_\gamma = E - T$. Для осуществления поглощения необходимо, чтобы $\Delta E < \Gamma$, где $\Delta E = E - E_\gamma = T$, $\Gamma = \hbar/\tau$ – ширина возбужденного уровня.

Т.к. $\Delta E = \frac{E^2}{2m}$, то для ядер ($E \sim 1$ МэВ) ΔE очень велико, сильно превосходя ширину возбужденного уровня. Для атомов же $\Delta E \sim 10$ МэВ $< \Gamma$.

Мёссбаэр установил, что при определенных условиях резонансное поглощение становится возможным: необходимо перейти к сильно охлажденным *кристаллическим* приемнику и источнику γ -квантов. В небольшой доле случаев импульс отдачи берет на себя вся кристаллическая решетка, что приводит к снижению ΔE .

Мёссбаэр измерял зависимость скорости счета детектора от скорости источника. При $v = 0$ наблюдалось резонансное поглощение, но при скоростях в несколько см/с резонансное поглощение полностью исчезало, т.о., плавно меняя скорость источника можно исследовать форму линии поглощения.

Благодаря эффекту Мёссбауэра можно измерять очень малые изменения энергии: $\Gamma/E \sim 10^{-11}$. Этот эффект позволил определить гравитационное красное смещение в поле тяжести Земли.

68 Радиоактивность

Деление и синтез ядер

Радиоактивность (от лат. *radio* — «излучаю», *radius* — «луч» и *actus* — «действенный») — явление спонтанного превращения неустойчивого изотопа химического элемента в другой изотоп (обычно другого элемента) (радиоактивный распад), или (реже) — явление спонтанного испускания γ -частиц без превращения. *Естественная радиоактивность* — самопроизвольный распад ядер элементов, встречающихся в природе. *Искусственная радиоактивность* — самопроизвольный распад ядер элементов, полученных искусственным путем через соответствующие ядерные реакции.

Э. Резерфорд экспериментально установил, что соли урана испускают лучи трех типов, которые по-разному отклоняются в магнитном поле:

- лучи первого типа отклоняются так же, как поток положительно заряженных частиц, их называли α -лучами;
- лучи второго типа отклоняются в магнитном поле так же, как поток отрицательно заряженных частиц (в противоположную сторону), их называли β -лучами;
- лучи третьего типа, которые не отклоняются магнитным полем, называли γ -излучением.

Энергетические спектры α -частиц и γ -квантов, излучаемых радиоактивными ядрами, дискретные, а спектр β -частиц — непрерывный.

Ядерная реакция — процесс превращения атомных ядер, происходящий при их взаимодействии с элементарными частицами, γ -квантами и друг с другом, часто приводящий к выделению колоссального количества энергии. Ядерные реакции могут происходить как с выделением, так и с поглощением энергии. Реакции первого типа, экзотермические, служат основой ядерной энергетики и являются источником энергии звезд. Реакции, идущие с поглощением энергии (эндотермические), могут происходить только при условии, что кинетическая энергия сталкивающихся частиц (в системе центра масс) выше определенной величины (порога реакции).

Запись ядерных реакций. Ядерные реакции записываются в виде специальных формул, в которых встречаются обозначения атомных ядер и элементарных частиц. **Первый способ** написания формул ядерных реакций аналогичен записи формул реакций химических: слева записывается сумма исходных частиц, справа — сумма получившихся частиц (продуктов реакции), а между ними ставится стрелка. Так, реакция радиационного захвата нейтрона ядром кадмия-113 записывается так: $^{113}_{48}\text{Cd} + n \rightarrow ^{114}_{48}\text{Cd} + \gamma$.

Мы видим, что число протонов и нейтронов справа и слева остается одинаковым (барионное число сохраняется). Это же относится к электрическим зарядам, лептонным числам и другим сохраняющимся величинам (энергия, импульс, момент импульса, и т.п.). В некоторых реакциях, где участвует слабое взаимодействие, протоны могут превращаться в нейтроны и наоборот, однако их суммарное число не меняется.

Второй способ записи, более удобный для ядерной физики, имеет вид $A(a, b\dots)B$, где A – ядро мишени, a – бомбардирующая частица (в том числе ядро), $b\dots$ – испускаемые частицы (в том числе ядра), B – остаточное ядро. В скобках записываются более легкие продукты реакции, вне – более тяжелые. Так, вышеприведенная реакция захвата нейтрона может быть записана в таком виде: $^{113}_{48}\text{Cd}(n, \gamma)^{114}_{48}\text{Cd}$.

Первое принудительное ядерное превращение азота в кислород, которое провел Резерфорд, обстреливая азот α -частицами, записывается в виде формулы $^{14}_7\text{N}(\alpha, p)^{17}_8\text{O}$, где $p = ^1_1\text{H}$ – протон. В «химической» записи эта реакция выглядит, как $^{14}_7\text{N} + \alpha \rightarrow p + ^{17}_8\text{O}$.

Каналы и сечение реакций. Типы и квантовое состояние частиц (ядер) до начала реакции определяют **входной канал реакции**. После завершения реакции совокупность образовавшихся продуктов реакции и их квантовых состояний определяет **выходной канал реакции**. Реакция полностью характеризуется входным и выходным каналами. Вероятность реакции определяется **поперечным сечением** реакции. В лабораторной системе отсчета (где ядро мишень покойится) вероятность взаимодействия в единицу времени равна произведению сечения (выраженного в единицах площади) на поток падающих частиц (выраженный в количестве частиц, пересекающих за единицу времени единичную площадку). Если для одного входного канала могут осуществляться несколько выходных каналов, то отношения вероятностей выходных каналов реакции равно отношению их сечений. В ядерной физике сечения реакций обычно выражаются в специальной единице – **барнах**, равных 10^{-24} см^2 .

Ядерный реактор

Ядерный реактор – устройство, в котором осуществляется управляемая цепная ядерная реакция, сопровождающаяся выделением энергии.

Превращение вещества сопровождается выделением свободной энергии лишь в том случае, если вещество обладает запасом энергий. Последнее означает, что микрочастицы вещества находятся в состоянии с энергией покоя большей, чем в другом возможном, переход в которое существует. Самопроизвольному переходу всегда препятствует **энергетический барьер**, для преодоления

которого микрочастица должна получить извне какое-то количество энергии — **энергии возбуждения**. Существуют два способа преодоления энергетического барьера: либо за счет кинетической энергии сталкивающихся частиц, либо за счет энергии связи присоединяющейся частицы.

Если иметь в виду макроскопические масштабы энерговыделения, то необходимую для возбуждения реакций кинетическую энергию должны иметь все или сначала хотя бы некоторая доля частиц вещества. Это достижимо только при повышении температуры среды до величины, при которой энергия теплового движения приближается к величине энергетического порога, ограничивающего течение процесса ($\sim 10^7$ К).

Любой ядерный реактор состоит из следующих частей:

- активная зона с ядерным топливом и замедлителем;
- отражатель нейтронов, окружающий активную зону;
- теплоноситель;
- система регулирования цепной реакции, в том числе аварийная защита;
- радиационная защита;
- система дистанционного управления.

Основная характеристика реактора — его **выходная мощность**. Мощность в 1 МВт соответствует цепной реакции, при которой происходит $3 \cdot 10^{16}$ делений в секунду.

Текущее состояние ядерного реактора можно охарактеризовать **эффективным коэффициентом размножения нейтронов**, k , или **реактивностью** ρ , которые связаны следующим соотношением: $\rho = \frac{k-1}{k}$.

Для этих величин характерны следующие значения:

- $k > 1$ — цепная реакция нарастает во времени, реактор находится в надкритичном состоянии, его реактивность $\rho > 0$;
- $k < 1$ — реакция затухает, реактор подкритичен, $\rho < 0$;
- $k = 1, \rho = 0$ — число делений ядер постоянно, реактор находится в стабильном критическом состоянии.

Критический объем ядерного реактора — объем активной зоны реактора в критическом состоянии. **Критическая масса** — масса делящегося вещества реактора, находящегося в критическом состоянии. С целью уменьшения утечки нейтронов, активной зоне придают сферическую или близкую к сферической форму.

Ядерный реактор может работать с заданной мощностью в течение длительного времени только в том случае, если в начале работы имеет запас реактивности. Протекающие в реакторе процессы вызывают ухудшение размножающих свойств среды, и без механизма восстановления реактивности реактор не смог бы работать даже малое время. Первоначальный запас реактивности создается путем постройки активной зоны с размерами, значительно превосходящими

ми критические. Чтобы реактор не становился надkritичным, в активную зону вводятся вещества-поглотители нейтронов. Управление ядерным реактором упрощает тот факт, что часть нейтронов при делении вылетает из осколков с запаздыванием, которое может составить от 0.2 до 55 с. Благодаря этому, нейтронный поток и, соответственно, мощность изменяются достаточно плавно, давая время на принятие решения и изменение состояния реактора извне.

На случай непредвиденного катастрофического развития цепной реакции, в каждом реакторе предусмотрено экстренное прекращение цепной реакции, осуществляемое сбрасыванием в активную зону специальных аварийных стержней или стержней безопасности — система аварийной защиты.

Механизмы ядерных реакций

Характер взаимодействия налетающей частицы с ядром зависит от ее кинетической энергии, массы, заряда и др. характеристик. Он определяется теми степенями свободы ядра (ядер) которые возбуждаются в ходе столкновения. Различие между ядерными реакциями включает и их различную длительность.

Если налетающая частица лишь касается ядра-мишени, а длительность столкновения приблизительно равна времени, необходимому для прохождения налетающей частицей расстояния, равного радиусу ядра-мишени ($\sim 10^{-22}$ с), то такие реакции относят к классу **прямых**. Общим для всех прямых ядерных реакций является селективное возбуждение небольшого числа определенных состояний (степеней свободы). В прямом процессе после первого столкновения налетающая частица имеет достаточную энергию, чтобы преодолеть ядерные силы притяжения в область действия которых она попала. Примерами прямого взаимодействия являются неупругое рассеяние нейтронов, реакции обмена зарядом.

Угловые распределения продуктов прямых ядерных реакций (зависимость вероятности вылета от угла, отсчитанного от направления пучка) позволяют определить квантовые числа селективно заселяемых состояний в каждой конкретной реакции, а величина сечения при заданной энергии — структуру этих состояний.

Если падающая частица не покидает область взаимодействия после первого столкновения, то она вовлекается в каскад последовательных столкновений, в результате которых ее начальная кинетическая энергия постепенно распределяется среди нуклонов ядра и возбужденными оказываются многие степени свободы, а состояние ядра постепенно усложняется. В процессе дальнейшей релаксации наступает статистическое равновесие и образуется составное ядро, время жизни которого $\sim 10^{-14} \div 10^{-18}$ с. Распад составного ядра не зависит от способа его образования. Тип распада определяется энергией возбуждения,

угловым моментом, четностью и изотопическим спином ядра. Энергетический спектр частиц, испускаемых в процессе девозбуждения составного ядра, характеризуется максвелловской формой и симметричным распределением «вперед — назад» относительно пучка (в системе центра инерции).

В случае распада средних и тяжелых составных ядер вероятность испускания нейтронов значительно превышает вероятность эмиссии заряженных частиц, вылету которых препятствует кулоновский барьер ядра. В тяжелых ядрах с испусканием нейтронов конкурируют процессы деления ядер и альфа-распада.

69 Нестационарная теория возмущений

Нестационарная теория возмущений

Нестационарная теория возмущений применяется в случае, когда возмущения зависят от времени. В этом случае теория возмущений основывается на методе вариации постоянных, так же как и в классической механике. Задача состоит в решении уШ

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = (H_0 + U(t))\psi(t)$$

при условии, что в начальный момент система находилась в одном из стационарных состояний $\psi_n^{(0)} \exp(-\frac{i}{\hbar}E_n^{(0)}t)$ невозмущенного гамильтониана H_0 .

Решение ищется в виде ряда

$$\psi(t) = \sum_m C_{mn}(t) \psi_m^{(0)} \exp(-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t),$$

в котором зависимость коэффициентов от времени возникает только благодаря возмущению:

$$i\hbar \frac{dC_{mn}}{dt} = \sum_k U_{mk}(t) C_{kn}(t), \quad (69.1)$$

где U_{mk} — собственные значения функции возмущений, $C_{mn}(-\infty) = \delta_{mn}$.

Если возмущение содержит только одну гармонику ($U(t) = V \exp(-i\omega t)$), вероятность перехода из состояния n при $t = -\infty$ в m при $t = \infty$ определяется выражением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} |C_{mn}(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mn}|^2 \delta(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}).$$

Т.о., за бесконечный промежуток времени переход произойдет с сохранением энергии. Для вероятности перехода в единицу времени получим:

$$w_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mn}|^2 \rho(E_n^{(0)}),$$

где ρ – плотность уровней энергии.

В квантовой теории поля $C(t) \equiv S(t, -\infty)$, т.е. является матрицей рассеяния. Уравнение (69.1) удобно записать в операторной форме:

$$i\hbar \dot{S}(t, -\infty) = U(t)S(t, -\infty).$$

Релятивистски инвариантное выражение для матрицы рассеяния можно воспроизвести в виде суммы диаграмм Фейнмана. Однако, уже во втором порядке по возмущениям в матрице рассеяния появляется расходимость. Для ее преодоления применяется процедура перенормировок.

Золотое правило Ферми

В квантовой физике, золотое правило Ферми позволяет вычислить вероятность перехода между двумя состояниями квантовой системы, используя нестационарную теорию возмущений. Хотя правило названо в честь Энрико Ферми, но большинство работы, приводящей к Золотому правилу было сделано Дираком.

Предположим, что система находится первоначально в состоянии $|i\rangle$ с гамильтонианом H_0 . Рассмотрим влияние независимого от времени гамильтониана возмущения H' .

Вероятность перехода из одного состояния в несколько состояний в единицу времени, например, из состояния $|i\rangle$ в набор состояний $|f\rangle$, дается в первом порядке теории возмущений:

$$T_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H' | i \rangle|^2 \rho,$$

где ρ является плотностью конечных состояний, и $\langle f | H' | i \rangle$ – матричный элемент (в бра–кет нотации) возмущения, H' , между конечным и начальным состояниями.

Золотое правило Ферми верно, когда H' независим от времени, $|i\rangle$ – состояние невозмущенного гамильтониана, состояния $|f\rangle$ формируют непрерывный спектр, и начальное состояние не было значительно обеднено (например, если рассеяние произошло в конечное состояние).

Самый общий способ получить уравнение состоит в том, чтобы воспользоваться нестационарной теорией возмущения и взять предел для поглощения согласно предположению, что время измерения является намного большим, чем время, необходимое для перехода.

Вторичное квантование

Вторичное квантование — метод описания многочастичных квантовомеханических систем. В особенности часто этот метод применяется для задач квантовой теории поля и в многочастичных задачах физики конденсированных сред. Суть метода вторичного квантования в том, что вместо волновых функций частиц в координатном или в импульсном представлении вводятся волновые функции в представлении чисел заполнения различных состояний одной частицы. Переходы между различными состояниями одной частицы при этом описываются как уменьшение числа заполнения, соответствующего одной волновой функции, на единицу, и увеличение числа заполнения другого состояния на единицу. Достоинство метода вторичного квантования в том, что он позволяет единообразно описывать системы с различным числом частиц, как с конечным фиксированным (в задачах физики конденсированных сред), так и с переменным, потенциально бесконечным (в задачах квантовой теории поля), числом частиц.

Для частиц, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна операторы, изменяющие числа заполнения состояний на единицу работают так же как операторы рождения и уничтожения в задаче об одномерном гармоническом осцилляторе: $[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$, $[a_i, a_j] = 0$, где квадратные скобки означают коммутатор, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Для фермионов используются другие операторы, которые удовлетворяют антисимметрическим соотношениям:

$$\{a_i, a_j^+\} = a_i a_j^+ + a_j^+ a_i = \delta_{ij}, \quad \{a_i, a_j\} = 0$$

70 Нуклон–нуклонное взаимодействие

Система двух нуклонов. Дейtron

Нуклоны в атомном ядре удерживаются **ядерными силами**, представляющими собой сильное взаимодействие.

Ядерные силы проявляются в парном взаимодействии нуклонов (дейтерий), взаимодействии свободных нуклонов с составными ядрами и ядер друг с другом, взаимодействии нуклонов внутри ядра.

Свойства ядерных сил:

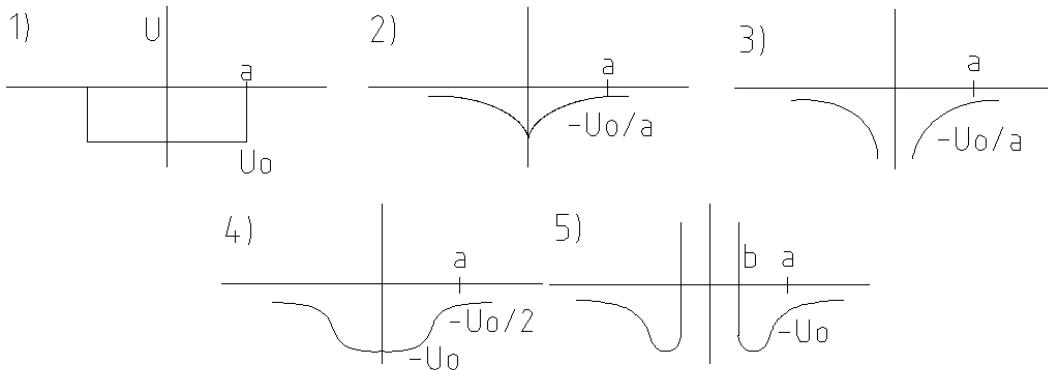
1. двухчастичное приближение: силы взаимодействия нуклонов не изменяются из-за присоединения других нуклонов, $\hat{H} = \sum a < b \hat{H}_{ab}$;
2. эти силы потенциальные в хорошем приближении;

3. силы интенсивны;
4. силы короткодействующие;
5. на сверхмалых расстояниях хорошо работает **приближение центрального поля**;
6. ядерный потенциал обладает сингулярным поведением;
7. силы зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов;
8. силы нецентральные.

У **дейтерия** спин, $I = 1$, масса, $M_D \equiv \mu \neq M_p + M_n$. Волновая функция, $\psi = \frac{1}{2}R(r)Y(\theta, \varphi)$. Для оценки радиуса дейтерия необходимо решить уШ:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - U - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] R(r) = 0.$$

При $l = 0$, $R'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - U]R = 0$. Это уравнение было решено для разных потенциалов (графики потенциалов приведены на рисунке).



Виды соответствующих потенциалов

1.

$$U = \begin{cases} -U_0, & r \leq a \\ 0, & r > a; \end{cases} \quad a - \text{радиус дейтерия.}$$

2.

$$U(a) = -\frac{U_0}{l}, \quad U(r) = -U_0 \exp(-\frac{r}{a}).$$

3. **Потенциал Юкавы:**

$$U(a) = -\frac{U_0}{a}, \quad U(r) = -\frac{U_0 \exp(-\frac{r}{a})}{\frac{r}{a}}.$$

4. **Потенциал Вуда–Саксона:**

$$U(r) = -\frac{U_0}{1 + \exp(\frac{r-a}{\delta})}, \quad \delta \approx 0.55 \text{ фм.}$$

5. Потенциал с непрерывной отталкивающей сердцевиной:

$$U(a) = -\frac{U_0}{a}, \quad U(r) = \begin{cases} -U_0 \exp(-\frac{r}{b}), & r > b \\ +\infty, & r < b. \end{cases}$$

Общим для всех потенциалов является малое значение a и большая величина U_0 .

В случае прямоугольной ямы, $R_D = \frac{1}{\gamma}$, где $\gamma = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu\Delta E}$, $\Delta E = -E$, $\psi = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{\exp(-\gamma^2)}{r}$.

Нуклон–нуклонное рассеяние

Можно выделить три группы исследований рассеяния нуклонов на нуклонах: в камере Вильсона; в фотопленке; в ионизационной камере.

Исследование распределения рассеянных нуклонов по углу, θ , и энергии показало, что $d\sigma/d\Omega \propto \cos \theta$. Это справедливо, лишь если дебройлевская длина волны нуклона превосходит радиус нуклонных сил. Т.о., радиус действия ядерных сил оказывается равным $R \approx 2 \text{ фм}$.

Спиновая зависимость. Тензорный характер ядерных сил

Опыты рассеяния медленных нейтронов на медленных атомах водорода показали, что сечения рассеяния различны для орто- и пара-атомов: $\sigma_{\text{орт}} \sim 30\sigma_{\text{пар}}$ (у орто-атомов водорода спины коллинеарны, у пара-атомов — антиколлинеарны). Таким образом, для учета спиновой зависимости ядерных сил в операторе взаимодействия, \hat{U} , необходимо добавить слагаемое, зависящее от направлений спинов взаимодействующих ядер:

$$\hat{U} = \hat{V}_1(r) + \hat{V}_2(r) \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

Кроме того, ядерные силы являются нецентрированными, т.е. они зависят не только от взаимной ориентации спинов, но и от их ориентации относительно прямой, соединяющей нуклоны (об этом говорит, например, то, что $M_D \neq M_p + M_n$). Т.о., ядерные силы являются **тензорными**.

Для учета тензорного характера ядерных сил к оператору \hat{H} необходимо добавить третье слагаемое с множителем $(\vec{S}_1 \vec{n}) \cdot (\vec{S}_2 \vec{n})$, где \vec{n} — единичный орт, проведенный от первого ядра ко второму:

$$\hat{H} = \hat{V}_1(r) + \hat{V}_2(r)(\vec{S}_1 \vec{S}_2) + \hat{V}_3(\vec{S}_1 \vec{n})(\vec{S}_2 \vec{n}).$$

Зарядовая независимость ядерных сил

Зарядовая симметрия — равенство ядерных сил, действующих в протон-протонных и нейтрон-нейтронных взаимодействиях (об этом говорит равенство сечений рассеяния протонов на протонах и нейтронов на нейтронах). **Зарядовая независимость** — равенство сил, действующих между протонами и нейтронами (более общий случай зарядовой симметрии).

Изоспин

Нуклону приписывается квантовое число $T = 1/2$ — **изоспин**. Состояния протонов и нейтронов отличаются проекцией изоспина, T_z : у протона она считается положительной, а у нейтрона — отрицательной. Волновая функция нуклона, $\psi = a\binom{1}{0} + b\binom{0}{1} = a\psi_p + b\psi_n$.

Барионный заряд, $B = 1$. Электрический заряд, $q = e(T_z + B/2)$.

Рассмотрим систему двух нуклонов, N' и N'' с изоспинами T' и T'' . Введем оператор *полного изоспина*: $T = T' + T''$. Полный изоспин может принимать значения 0 (изосинглетное состояние) и 1 (изотривлетное состояние). Т.к. $T_z = T'_z + T''_z$, у систем $p - p$ $T_z = 1$, $n - n$ — $T_z = -1$, $p - n$ — $T_z = 0$. Следовательно, дейтерий может находиться и в изосинглетном, и в изотривлетном состояниях.

Согласно **обобщенному принципу Паули**, ψ системы нуклонов антисимметрична относительно перестановки любых их пар, \Rightarrow изотривлетному состоянию соответствует антисимметричная, а изосинглетному — симметричная волновая функция. Т.о., получили **принцип изоспиновой инвариантности**: *взаимодействия в системах $p - p$, $n - n$ и $p - n$ одинаковы для одинаковых изоспиновых состояний*.

Обменный характер ядерных сил. Мезонная теория

Для большинства ядер энергия связи, $E_{\text{св}} \propto A$ (A — количество нуклонов в ядре), $V \propto A$. Двухчастичное приближение и учет тензорных сил не способны объяснить такое поведение спиновых сил. Для их объяснения необходимо ввести взаимодействие, препятствующее чрезмерному сближению частиц, т.е. допустить, что ядерные силы обладают свойством насыщения. Любой нуклон притягивает небольшое число соседей и отталкивает остальные частицы. Соответствующие силы назвали **обменными**. Необменные силы были названы **силами Вигнера**.

Из обменных сил выделяют: **силы Майорана** (перестановка координат нуклонов), **силы Барлетта** (перестановка спинов) и силы **Гайзенберга** (перестановка как координат, так и спинов).

Первой теорией обменных сил является **мезонная теория**. Согласно гипотезе Юкавы, ядерное взаимодействие — результат обмена нуклонов виртуальными мезонами (квантами сильного поля). В последствии в космическом излучении были обнаружены **π -мезоны** (пионы).

У пиона $T = 1$, $T_z = 0, \pm 1$ (соответственно, выделяют π^+ , π^0 и π^- пионы). Истинно нейтральной является π^0 -мезон, π^+ или π^- -мезоны — античастицы. Спин пионов равен нулю, четность отрицательна. Масса пиона, $m_\pi \approx 270m_e$. Пионы являются нестабильными частицами, периоды полураспада составляют $\sim 10^{-8}$ с для π^\pm -мезонов и $\sim 10^{-16}$ с для π^0 -мезонов.

Возможны следующие виды реакций:

$$p \rightleftharpoons p + \pi^0; \quad n \rightleftharpoons n + \pi^0; \quad p \rightleftharpoons n + \pi^+; \quad n \rightleftharpoons p + \pi^-.$$

Мезонная теория предсказала ряд фактов:

- существование пионов;
- характеристики пионов;
- большую величину сечения рассеяния пионов на нуклонах;
- многообразие взаимных превращений частиц с участием пионов;
- фоторождение пионов: $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$.

Модели ядер. Обоснование оболочечной модели

Три вида ядерных моделей:

- **коллективные**: ядерная материя, капельная теория, несферическая модель;
- **обобщенные**: ферми–газ, оболочечные модели (по аналогии с оболочечной моделью атома);
- **одночастичные**: обобщение сильного и слабого взаимодействий, обобщения парных корреляций.

Из моделей можно получить **полуэмпирическую формулу Бейцзеккера**:

$$E = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 Z^2 A^{-1/3} - \alpha_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \alpha_5 A^{-3/4} \delta(A - 2Z) + \Delta m c^2.$$

Член с α_1 соответствует постоянству удельной энергии связи, с α_2 — поверхностной энергии, с α_3 — кулоновской энергии, с α_4 — эффекту симметрии, с α_5 — эффекту спаривания; $\Delta m c^2$ — **дефект массы** ядра.

В пользу модели ядерных оболочек говорит существование **«магических чисел»** — стабильность ядер с количеством нейтронов, N , или протонов, Z , равным 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, а также особая стабильность «двойды магических» ядер ($N = Z$ и оба равны одному из магических чисел).

Было предположено, что нуклоны в ядре квазинезависимы и движутся в усредненном поле, обладающем центральной симметрией. Их движение подчиняется законам квантовой механики. Оболочки заполняются в соответствии с принципом Паули, что и дает значения магических чисел (полностью заполненные оболочки).

Кроме того, эта модель описывает спины, четности и магнитные моменты ядер, в которых имеется один нуклон сверх заполненных оболочек или недостает одного нуклона. Но для других ядер предсказания оболочечной модели неоднозначны.

Основной недостаток данной модели: она не может объяснить большие квадрупольные моменты некоторых ядер (что устраняется в обобщенных моделях).

Одночастичные состояния. Деформация ядер

В одночастичных моделях предполагается, что нуклоны движутся в самосогласованном поле остальных нуклонов, либо же (модель ферми–газа) вообще не взаимодействуют друг с другом.

Говоря о форме ядра, прежде всего имеют в виду форму его самосогласованного поля. Т.к. $Q_0 \neq 0$, то форма несферическая (подобна эллипсоиду вращения).

Параметр деформации: $\beta = \Delta R / R$, где R – размер полуоси симметрии, ΔR – разность между большой и малой полуосами симметрии. Если заряд в ядре распределен равномерно, то $Q_0 = \frac{4}{5}ZR^2\beta$.

Еще одним доказательством несферичности ядер является их «вращение»: существование вращательных полос в энергетических спектрах ядер, $E_I = \frac{\hbar^2}{2J}I(I+1)$.

Из соображений симметрии следует, что четности всех вращательных состояний положительны, а спин $I^\eta = 0^+, 2^+, 4^+, \dots$

Обобщенная модель

Обобщенные модели исходят из обобщения коллективных и одиночных моделей. Ядро – сгусток вещества, окруженный несколькими внешними нейtronами. Поведение ядерного остова определяется одной из коллективных моделей, а поведение внешних нуклонов – самосогласованным полем.

1. *Обобщенная модель со слабым взаимодействием.* Ядро имеет сплошной сферический четно–четный состав, определенный капельной моделью, оставшиеся нейтроны совершают независимые движения в поле остова. Слабое взаимодействие коллективных и одночастичных степеней свободы.

2. *Обобщенная модель с сильным взаимодействием.* Ядро имеет остов, образуемый нуклонами заполненных оболочек, внешние нуклоны интенсивно взаимодействуют с остовом. Эти нуклоны могут вызывать колебания остова и его деформацию.
3. *Обобщенная модель парных корреляций.* Эта модель учитывает остаточное взаимодействие внешних нуклонов (по типу оболочечной модели с парными корреляциями). Данная модель является наиболее современной.

71 Частицы и взаимодействия

Фундаментальные взаимодействия. Постоянные и радиусы взаимодействий

Все виды взаимодействий считаются обусловленными соответствующими частицами (реальными или виртуальными): π -мезонами, фотонами, электронами и нейтрино (позитронами и антинейтрино), гравitonами. Конечная скорость обменных частиц обуславливает ненулевое время всех взаимодействий и их инерционность.

Сильное взаимодействие Этот вид взаимодействия обеспечивает ядерные силы, удерживающие нуклоны в ядре. Т.к. данное взаимодействие наиболее интенсивно, будем считать условно, что его интенсивность, $I = 1$. Радиус взаимодействия, $R \sim 10^{-15}$ м, характерное время, $\tau \sim 10^{-23}$ с. **Характерным временем** называется минимальное время жизни частиц, подвергающихся распаду за счет данного типа взаимодействия, или же отношение характерного радиуса взаимодействия к скорости (c).

Более точно интенсивность сильного взаимодействия в ядре определяется формулой $I = \frac{g^2}{\hbar c}$, где g – мезонный заряд взаимодействующих частиц.

Сильное взаимодействие обеспечивается виртуальными π -мезонами (пионами).

При данном виде взаимодействия выполняются *законы сохранения*: заряда, барионного заряда, энергии, импульса, спина, изоспина и его проекции, странности и четности.

Электромагнитное взаимодействие Данное взаимодействие происходит между заряженными частицами. Интенсивность, $I = \frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137}$, характерное

время, $\tau \sim 10^{-20}$ с, радиус взаимодействия, $R = \infty$. Взаимодействие обеспечивается виртуальными и реальными фотонами.

При данном взаимодействии выполняются все законы сохранения, кроме сохранения изоспина, в результате чего возникает различие между массами частиц с равными проекциями изоспина.

Слабое взаимодействие Данный вид взаимодействия наблюдается при β -распаде. Интенсивность, $I = \frac{f^2}{\hbar c} \sim 10^{-12}$ (f – лептонный заряд), радиус, $R \sim 10^{-18}$ м, время, $\tau \sim 10^{-13}$ с. Носителями взаимодействия являются промежуточные бозоны.

При слабом взаимодействии не выполняются законы сохранения изоспина и его проекции, странности и честности.

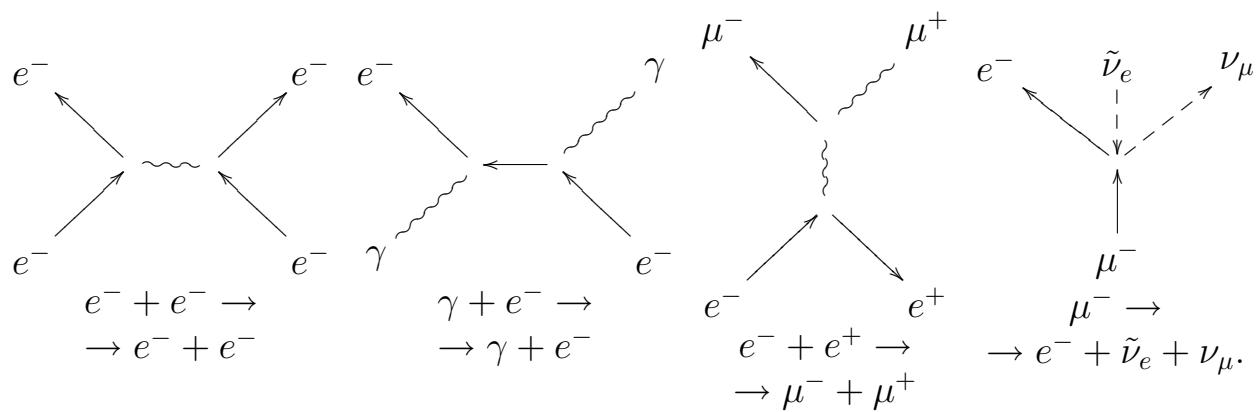
Сверхслабое (гравитационное) взаимодействие Существует между всеми частицами. Интенсивность, $I \sim 10^{-38}$, радиус, $R = \infty$, время неизвестно. Носителями взаимодействия являются гипотетические частицы — **гравитоны**, имеющие спин, $s = 2$, и нулевой магнитный момент. Естественно, что столь малая интенсивность данного вида взаимодействия не играет никакой роли в микромире. Т.о., можно сказать, что сверхслабое взаимодействие существенно только в макро- и мегамире.

Диаграммы Фейнмана

Любой процесс взаимодействия можно представить как последовательность элементарных актов, например, испускание или поглощение виртуальной частицы.

Правило Фейнмана: при выбранном положительном направлении оси времени графики, имеющие то же направление, отвечают движению частицы, Q , а направленные противоположно — движению античастицы, \tilde{Q} . Т.к. фотон тождествен антифотону, он не снабжается стрелкой, обозначаясь волнистой линией.

Любой процесс, т.о., допускает простое наглядное графическое представление при помощи **диаграмм Фейнмана**. На них линии со свободным концом обозначают реальные начальные и конечные частицы, а все внутренние линии — виртуальные или промежуточные частицы. Будем считать, что ось времени направлена снизу вверх. Тогда, получим примеры диаграмм для электромагнитного и слабого взаимодействия.



Основные характеристики частиц. Квантовые числа

Характеристики частиц делятся на две группы: **геометрические**, связанные со свойством пространства–времени, и **внутренние**, отражающие симметрию фундаментальных взаимодействий.

Геометрические характеристики.

Масса, m . Чисто динамическая характеристика. Не может служить основным классификационным признаком (хотя на заре развития квантовой механики частицы делили по массе на лептоны, мезоны и барионы).

Спин, I . Собственный момент импульса частицы. Его значение однозначно определяет тип статистики для описания поведения частицы, а также вид ее волновой функции.

Пространственная четность, η_P . Определяет поведение волновой функции частицы относительно пространственной инверсии. Саму частицу характеризует **внутренняя** пространственная четность, η_0 (без влияния момента импульса).

Внутренние характеристики.

Электрический заряд, q . В единицах e .

Магнитный момент, μ . Характеризует взаимодействие частицы с внешним ЭМП. μ связан со спином, I , и существует лишь при $I \geq 1/2$. Имеет динамическое происхождение.

Лептонный заряд, L . $L = 1$ у лептонов, $L = -1$ у антилептонов и $L = 0$ у прочих частиц. Полный лептонный заряд складывается из электронного, мюонного и тауонного зарядов: $L = L_e + L_\mu + L_\tau$.

Барионный заряд, B . Вводится аналогично лептонному заряду. Так же является аддитивной величиной. Барионный заряд атомных ядер называют **массовым числом, A** .

Изоспин, T . Приписывается изомультиплету и определяет число его членов, $N = 2T + 1$.

Проекция изоспина, T_z . Различна для членов мультиплета. Электрический заряд барионов, $q = T_z + \frac{1}{2}B$.

Странность, S . Вводится, чтобы электрические заряды «странных» частиц удовлетворяли обобщенному соотношению: $q = T_z + \frac{1}{2}(B + S)$. $S = 0$ у обычных частиц, $S = 1$ у К-мезонов, $S = -1$ у Λ - и Σ -гиперонов, $S = -2$ у каскадного Ξ -гиперона, $S = -3$ у Ω -гиперона.

Гиперзаряд, Y . $Y = B + S \Rightarrow q = T_z + \frac{1}{2}Y$. Тогда, т.к. $\langle T_z \rangle = 0$, то $Y = 2\langle q \rangle$. Гиперзаряд является более удобной величиной, чем странность.

Очарование, C . Введена после открытия «очаровательных» частиц. $q = T_z + \frac{1}{2}(B + S + C)$.

Зарядовая четность, η_c . Определяет поведение волновой функции при операции зарядового сопряжения, \hat{C} , переводящей волновую функцию частицы в ψ античастицы: $\hat{C}\psi = \eta_c\psi$, $\eta_c^2 = 1 \Rightarrow \eta_c = \pm 1$. Зарядовой четностью обладают только **истинно нейтральные** частицы, тождественные своим античастицам.

Среднее время жизни, τ .

Законы сохранения

Универсальные законы сохранения: четырехимпульса (однородность четырехмерного пространства Минковского), момента импульса (изотропность пространства) и заряда, помимо электрического, еще и B , и L , (инвариантность калибровочных преобразований).

В сильном взаимодействии сохраняется странность (гиперзаряд) и изоспин (в связи с изоспиновой симметрией).

Электромагнитное взаимодействие не столь симметричное, в нем не сохраняется изоспин (однако, сохраняется его проекция).

Слабое взаимодействие наименее симметрично. В нем не сохраняются четность, изоспин и его проекция, спин.

Допустим, что наблюдается реакция $a + b \rightarrow c + d$, где a , b , c и d – некоторые частицы. Если данная реакция протекает, то сохраняются все законы, соответствующие данному взаимодействию (и обратно, с поправкой на особенности слабого и сверхслабого взаимодействий). Неизменности законов сохранения будут соответствовать, в данном случае, и производные реакции, в которых *частица с одной стороны отношения будет перенесена в другую, с заменой на соответствующую античастицу*. Так, например, реакция комптоновского рассеяния кванта на электроне, $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$, может быть превращена в реакцию аннигиляции электрона и позитрона: $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$.

Классификация частиц

Частицы классифицируются по следующим признакам:

- по отношению к слабому взаимодействию: **адроны** (участвуют) и **аденоны** (не участвуют);
- по времени жизни: **стабильные и резонансные**;
- по спину: **фермионы и бозоны**;
- по характеру сильного взаимодействия: **изомультиплеты**;
- в соответствии с набором квантовых чисел: **частицы**;
- любой частице сопоставляется **античастица**.

Элементарные частицы делят на **адроны** и **фундаментальные**. Адроны рассматриваются в качестве составных частиц, а фундаментальные являются истинно элементарными. Фундаментальные частицы: **кванты** (γ -квант ЭМП и G -квант гравитационного поля) и **лептоны** (Е-лептоны: e^- и ν_e ; М-лептоны: μ^+ и μ_e ; Т-лептоны: τ^- и ν_τ). Адроны делятся на **стабильные и резонансы**. Стабильные адроны: **мезоны** (π , η , k , D в разновидностях $^+, ^0$ и $^-$) и **барионы** (N -нуклон: протон, p , и нейтрон, n ; Λ -, Σ -, Ξ -, Ω -, Λ_C - гипероны). Резонансы: **мезонные** (ρ , ω и K) и **барионные** (Δ , Σ^* и Ξ^*). Резонансы имеют наименьшее время жизни ($\sim 10^{-22} \div 10^{-23}$ с), чем больше масса резонанса, тем больше для него число возможных каналов распада. Время жизни стабильных адронов превышает (у некоторых — незначительно) характерное время сильного взаимодействия.

Современная физика предполагает, что все адроны состоят из фундаментальных частиц — **кварков**, несящих дробный заряд ($q = -1/3, 0, 1/3$ е) и обладающих всеми характеристиками адронов и некоторыми дополнительными характеристиками (цвет, запах, странность, очарование, красота). Комбинации кварков и **глюонов**, посредством которых осуществляется межкварковое взаимодействие, образуют более тяжелые комплексы — адроны.

Согласно уравнениям Дирака, кроме состояний с положительной энергией могут существовать состояния с энергией отрицательной. **Вакуум** — состояние,

в котором все уровни $E < 0$ заселены электронами, а уровни $E \geq 0$ свободны. Если электрону с $E < 0$ сообщить энергию $E \geq 2m_e c^2$, он перейдет в состояние с положительной энергией и будет вести себя как электрон с положительным зарядом — позитрон (антиэлектрон).

При встрече частицы с античастицей происходит аннигиляция с выбросом свободной энергии. Каждая частица имеет соответствующую античастицу.

В сильных ЭМП из вакуума под действием γ -квантов могут рождаться пары электрон–позитрон. Аналогично, при аннигиляции электрона и позитрона происходит выброс γ -кванта.

Единый принцип взаимодействий

Схожесть свойств лептонов заставила задуматься о том, не являются ли они проявлением одних и тех же частиц. Это обстоятельство положило начало **теории электрослабого взаимодействия**: пары лептон — соответствующее ему нейтрино рассматриваются как дублетные представления одних и тех же частиц, различающиеся между собой лишь значением **слабого изоспина**. Объединение слабого и электромагнитного взаимодействий возможно при энергиях, превышающих массу промежуточного W -бозона (~ 80 ГэВ) — кванта электрослабого поля. Еще одним подтверждением теории электрослабого взаимодействия является осцилляция нейтрино (за промежуток времени от рождения и до взаимодействия с какой-либо частицей нейтрино может изменить свой тип), т.е. взаимное превращение $\nu_e \rightleftarrows \nu_\tau \rightleftarrows \nu_\mu$.

Помимо лептонов и кварков (фермионов), к истинно фундаментальным частицам относятся калибровочные бозоны (глюоны, фотоны, промежуточные бозоны) — кванты взаимодействий. Кроме того, к этой группе следует отнести гравитон.

Теория, сводящая все виды взаимодействия к одному, и представляющая все частицы спинорными разновидностями единой квантовой системы (или линейной комбинации основных квантовых систем), называется **теорией Великого объединения**. Экспериментальное подтверждение данной теории в лабораторных условиях невозможно ввиду чрезвычайно высоких уровней энергии, при которых исчезает различие между видами взаимодействий.

Возможно, что существование различных внутренних квантовых чисел у элементарных частиц означает более сложную геометрию микромира, отвечающую большему числу измерений, чем макроскопическая геометрия. Эти идеи отражены в **теории суперструн**, являющихся аналогами струн, протянутых в многомерном (~ 10) пространстве. Тогда элементарные частицы являются специфическими возбуждениями суперструн. Считается, что «лишние» измерения не обнаруживают себя в силу компактификации, т.е. образования замкнутых

подпространств с характерными размерами $\sim 10^{-35}$ м. Пока теория суперструн, равно как и различные варианты теории Великого объединения, остаются не подкрепленными экспериментальными данными.

Физика элементарных частиц сложна еще и тем, что свойства пространства–времени на сверхмалых расстояниях ($\sim 10^{-35}$ м) невозможно предсказать. Здесь проявляется квантовый характер пространства–времени (не определено, возможно ли существование областей с размерами, меньшими кванту пространства–времени — фундаментальной длины). Кроме того, на таких расстояниях возможна флюктуация метрики за счет квантовых гравитационных эффектов. Таким образом, для построения теории Великого объединения скорее всего, необходимо исследовать взаимодействие сверхмалых частиц, имеющих значительные массы, на расстояниях пора фундаментальной длины, когда интенсивность гравитационного взаимодействия становится сравнима с интенсивностью сильного взаимодействия.

Электромагнитное взаимодействие

Электромагнитное взаимодействие — одно из четырех **фундаментальных взаимодействий**. Электромагнитное взаимодействие существует между частицами, обладающими электрическим зарядом, а также между электрически нейтральными составными частицами, части которых обладают зарядом. Например, нейтрон — нейтральная частица, однако он содержит в своем составе заряженные кварки и потому участвует в электромагнитном взаимодействии (в частности, обладает ненулевым магнитным моментом).

Из фундаментальных частиц в электромагнитном взаимодействии участвуют кварки, электрон, мюон и тауон, а также заряженные калибровочные W^\pm бозоны. С точки зрения квантовой теории поля электромагнитное взаимодействие переносится безмассовым бозоном — **фотоном**.

Электромагнитное взаимодействие отличается от слабого и сильного взаимодействия своим дальнодействующим характером — сила взаимодействия между двумя зарядами спадает только как вторая степень расстояния. По такому же закону спадает с расстоянием гравитационное взаимодействие. Электромагнитное взаимодействие заряженных частиц намного сильнее гравитационного, и единственная причина, по которой электромагнитное взаимодействие не проявляется с большой силой на космических масштабах — электрическая нейтральность материи, то есть наличие в каждой области Вселенной с высокой степенью точности равных количеств положительных и отрицательных зарядов.

На проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует **сила Ампера**: $\vec{F}_A = I \cdot [\Delta \vec{l} \times \vec{B}]$. На заряженную частицу, движущуюся в магнитном

поле, действует **сила Лоренца**: $\vec{F}_L = q \cdot [\vec{v} \times \vec{B}]$.

72 Сильные и слабые взаимодействия

Классификация адронов

Количество адронов достигает нескольких сотен, подавляющее большинство из них — резонансы. У адронов обнаружена электромагнитная структура. Это вынудило искать руководящие принципы, упорядочивающие классификацию адронов.

Основные адроны:

- нуклоны, $S = 0, T = 3/2$;
- Δ -гиперон, $S = 0, T = 3/2$;
- Λ -гиперон, $S = -1, T = 0$;
- Σ -гиперон, $S = -1, T = 1$;
- Ξ -гиперон, $S = -2, T = 1/2$;
- Ω -гиперон, $S = -3, T = 0$.

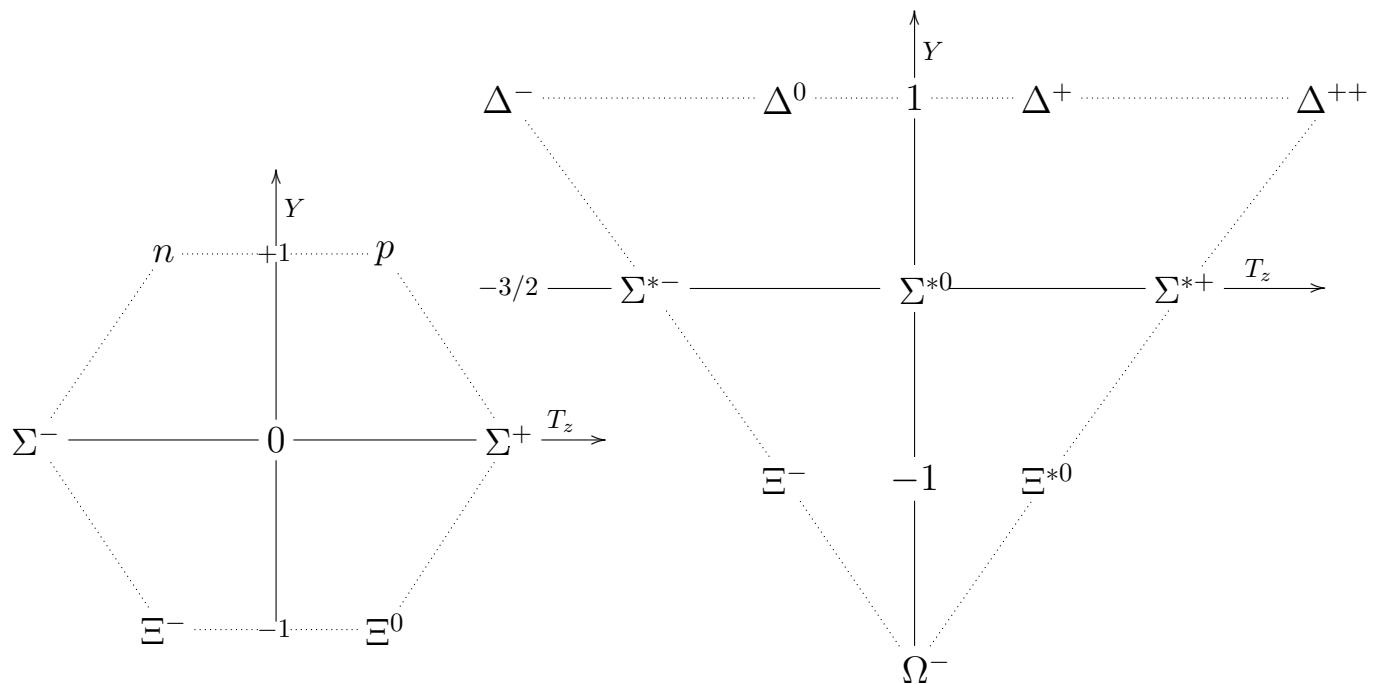
Мезоны (π, η, k, D) имеют несколько меньшую, по сравнению с гиперонами, массу.

Супермультиплеты. Кварки

Если на плоскости $T_z - S(Y)$ разместить адроны в виде точек, проявятся симметричные группы — **супермультиплеты** размерностью 1, 8 и 10. Такие диаграммы называют **весовыми**.

Для объяснения супермультиплекативности адронов были предложены новые фундаментальные частицы: **кварки**. Вначале ввели три кварка: u — верхний ($Y = 1/3, T = 1/2$), d — нижний ($Y = 1/3, T = -1/2$) и s — странный ($Y = -2/3, T = 0, S = 1$). Спин кварков, $I = 1/2$, четность, $\eta_p = +1$, бозонный заряд, $B = 1/3$, для всех кварков. Например, нейтрон состоит из одного u - и двух d -кварков: $n = udd$; $p = uud$, $\Lambda^0 = uds$ и т.д. Однако, три таких кварка не позволили объяснить состояния с одинаковыми спинами, например, $\Omega^- = sss$, поэтому ввели понятие **цвета**: R, G, B . Антикварки, соответственно, обладают антицветами: \tilde{R}, \tilde{G} и \tilde{B} . Кроме цвета ввели ограничение: т.к. все адроны — белые, составляющие их кварки должны в сумме давать «белый» цвет (т.е. $R+G+B$ или кварк + антикварк). Сами кварки стали рассматриваться как одна и та же частица с разным значением квантового числа **аромата**.

В последствии выяснилось, что трех кварков «не хватает»: был введен четвертый кварк: c — очарование ($I = 1/2, \eta_p = 1, B = 1/3, T = 0, S = 0, C = 1$,



Весовые диаграммы

$Y = B + S + C = 4/3$). Затем ввели кварк b — красота с новым квантовым числом, $b = 1$, $Y = B + S + C - b = -2/3$. Далее последовал кварк t — правда с новым квантовым числом, $t = 1$. В свободном виде кварки не наблюдались.

Для объяснения межкваркового взаимодействия были введены частицы — **глюоны**, передающие цвет от кварка к кварку.

Итак, согласно кварковой теории, барионы состоят из трех夸克ов, мезоны — из кварка и антикварка. В свою очередь, кварки «конструируют» из других частиц (например, хромоны: R , G и B ; флэйвоны: α и \varkappa ; фамилоны: f_I , f_{II} , f_{III} и пр.). Несмотря на чисто гипотетический характер, кварковая теория позволила предсказывать новые, впоследствии обнаруженные, элементарные частицы.

Частицы, с очарованием (C), отличным от нуля, называются *очарованными*. Очарование подобно странности сохраняется при сильных и электромагнитных взаимодействиях, но не сохраняется при слабых. Распады очарованных адронов происходит за счет слабого взаимодействия. При этом очарование меняется на единицу. Однако, в некоторых случаях при распадах частиц с $C = 0$ могут возникать очарованные частицы. В этом случае частицы-прообразы называют частицами со скрытым очарованием (например, J/ψ -мезон, состоящий из кварка s и антикварка \bar{s}). По своей структуре квантовая система $s\bar{s}$ (*чармоний*) напоминает атом водорода, однако, в отличие от последнего, ее различные возбужденные состояния условились считать различными частицами.

Веским аргументом в пользу кварковой модели адронов явились опыты по прямому просвечиванию адронов высокогенеретическими электронами. Происходящий при этом процесс (*глубоконеупругое рассеяние*) показал, что внутри адронов электроны рассеиваются на частицах с зарядами $+2/3$ и $-1/3$ и полуцелым спином. О конечных размерах кварков эти опыты ничего не говорят. Однако, возможно, что и кварки не являются истинно элементарными частицами. «Заключение» кварков внутри адронов (т.е. отсутствие возможности существования отдельных свободных кварков) подтверждает эту теорию, т.к. согласно современной квантовой теории, при получении дополнительной энергии кварк преобразуется в систему кварк–антикварк, т.е. в новый мезон. Еще одной теорией неосуществимости получения свободных кварков является теория, согласно которой межкварковые взаимодействия являются дальнодействующими, т.е. для отделения их друг от друга требуются сверхбольшие (в идеале — бесконечные) энергии (чему, отчасти, соответствует гипотеза существования кварковых звезд). До сих пор единственной лабораторией, позволяющей исследовать взаимодействия частиц при сверхвысоких энергиях является окружающий нас макрокосмос, и поэтому проблемы наблюдения сильно удаленных объектов все еще не позволяют нам сколь нибудь конкретно доказать или опровергнуть теории квантовой хромодинамики и других теорий сверхинтенсивных взаимодействий.

Лептоны

Все лептоны являются фермионами, т.е. обладают полуцелым спином. Лептонам приписывается лептонный заряд, $L = 1$, антилептонам — $L = -1$. Полный лептонный заряд складывается из частичных: $L = L_e + L_\mu + L_\tau$. Лептоны разделяют на три дублета: электронный (электрон, позитрон, электронные нейтрино и антинейтрино), мюонный и таонный. Взаимное превращение лептонов осуществляется под воздействием слабого взаимодействия. Так, например, $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$, $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \tilde{\nu}_e$.

Слабые и электрослабые взаимодействия

Промежуточные бозоны. Согласно теории электрослабого взаимодействия, электромагнитное и слабое взаимодействия являются частями одного целого взаимодействия. Переносчиками этого вида взаимодействия являются **промежуточные бозоны**. До своего открытия промежуточные бозоны были предсказаны экспериментально. Каждый промежуточный бозон может распадаться на лептон и соответствующее нейтрино, например, $W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ или $W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. Являясь переносчиками электрослабого взаимодействия, промежуточные бозоны участвуют, например, и в β -распаде: $n \rightarrow p + W^- \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

Законы сохранения. Т.к. слабое взаимодействие является сильно несимметричным, при нем выполняются только универсальные законы сохранения: четырехимпульса, момента импульса, заряда (в т.ч. барионного и лептонного зарядов). При этом выполняется ограничение на суммарное изменение спина: $|\Delta S| \leq 1$.

Воспользовавшись законами сохранения, можно, например, определить каналы распада мюона:

1. т.к. μ^- — лептон, он распадается под воздействием слабого взаимодействия;
2. закон сохранения заряда: $\mu^- \rightarrow e^- + \dots$;
3. закон сохранения электронного лептонного заряда: $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \dots$;
4. закон сохранения мюонного лептонного заряда: $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$;
5. законы сохранения не запрещают и такие каналы, как: $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu + \gamma$, $\mu^- \rightarrow \tilde{e}^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu + e^- + e^+$, однако, согласно правилу «алгебры реакций», наибольшую вероятность будет иметь реакция с наименьшим числом частиц.

Взаимодействие нейтрино с веществом. Нейтрино были «изобретены» для того, чтобы удовлетворить законам сохранения при β -распаде. Затем они были обнаружены с помощью реакций К-захвата, $\tilde{\nu} + p \rightarrow n + e^+$, в сцинтилляторе с раствором $CdCl$ в воде.

Нейтрино обладают **спиральностью**, $\vec{s} \cdot \vec{p}$, где \vec{p} — импульс. Спиральность позволила предположить, что если нейтрино — частицы с нулевой массой, спиральность является их внутренним свойством, однако, если масса нейтрино ненулевая, в разных СК спиральность должна быть разная. Проведенные опыты позволили определить массу нейтрино, составившую у ν_e около 30 эВ.

Спиральность нейтрино правовинтовая, у антинейтрино — левовинтовая. Из-за крайне малого сечения реакций взаимодействия нейтрино с веществом требуются установки с огромным количеством реагента для обнаружения одного–двух нейтрино в час. Нейтринные телескопы представляют собой камеры, заполненные реагентом (например, хлоридом кадмия), и расположенные глубоко под землей для исключения влияния космических частиц. Камера окружена сцинтилляционными счетчиками, регистрирующими возникающие в результате К-захвата частицы. Помимо электронных нейтрино, ν_e , были открыты таонное, ν_τ , и мюонное, ν_μ . Опыты показали, что нейтрино — проявления одной и той же частицы (за время своей жизни нейтрино осциллирует, т.е. испущенное в результате реакции мюонное нейтрино через некоторое время становится мюонным, затем, например, таонным и т.д.).

Электрослабое взаимодействие. Общие черты электромагнитного и слабого взаимодействия:

- ЭМ взаимодействие осуществляется посредством фотонов, слабое — посредством промежуточных бозонов;
- ЭМ ток является четырехвектором, так же как и слабый ток (поток комплексов $e^- \nu_e$, $\mu \nu_\mu$, $\tau \nu_\tau$);
- ЭМ и слабое взаимодействия универсальны, их интенсивность полностью определяется электрическим и лептонным зарядами.

Различия данных взаимодействий:

- радиус ЭМ взаимодействия, $R = \infty$, у слабого взаимодействия $R \sim 10^{-18}$ м, $m_\gamma = 0$, $m_{\text{бозона}} > 0$;
- из-за большой массы бозонов к слабым взаимодействиям невозможно применить теорию возмущений;
- ЭМ взаимодействие сохраняет все квантовые числа, кроме T , слабое не сохраняет даже четность.

Однако, с точки зрения квантовой физики, различия взаимодействий проявляются в большей степени лишь на больших расстояниях, на расстояниях порядка характерного размера адрона и меньше данные взаимодействия проявляют себя одинаково. Наиболее успешной теорией электрослабого взаимодействия является теория **Вайнберга и Салама**. Переносчиками электрослабого взаимодействия являются промежуточные бозоны: W^+ , W^- и Z^0 .

73 Нуклеосинтез

Нуклеосинтез во Вселенной. Ядерные реакции в звездах

Нуклеосинтез — процесс синтеза ядер химических элементов тяжелее водорода. Различают *первичный нуклеосинтез*, проходивший на начальных стадиях существования Вселенной в процессе Большого Взрыва и *звездный нуклеосинтез*.

В процессе первичного нуклеосинтеза образуются элементы не тяжелее лития. Стандартная модель Большого Взрыва предсказывает следующее соотношение элементов: H — 75%, ^4He — 25%, H_2 — $3 \cdot 10^{-5}\%$, ^3He — $2 \cdot 10^{-5}\%$, ^7Li — $10^{-9}\%$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Синтез более тяжелых ядер происходит в звездах. Легкие ядра (до углерода ^{12}C включительно) могут синтезироваться в недрах относительно немассивных звезд в **цикле Бете** (двухчастичные взаимодействия) и тройной гелиевой реакции: $^4\text{He} + ^4\text{He} \rightarrow ^8\text{Be}$, $^8\text{Be} + ^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$.

Ядра до железа ^{56}Fe синтезируются путем слияния более легких ядер в недрах массивных звезд, синтез тяжелых и сверхтяжелых ядер идет путемнейтронного захвата в предсверхновых звездах и при взрывах сверхновых. Экспе-

риментальным подтверждением этого факта служит низкое содержание тяжелых элементов в старых звездах, образовавшихся на ранних стадиях эволюции Вселенной.

Космические лучи

Естественная радиоактивность космоса (**космические лучи**) представляет собой поток заряженных частиц высоких энергий, падающих на Землю из космического пространства (первичные лучи), а также поток вторичных частиц, родившихся в реакциях в верхних слоях земной атмосферы. До развития ускорительной техники космические лучи служили единственным источником элементарных частиц высокой энергии. Основными источниками первичных космических лучей являются взрывы сверхновых звезд (галактические космические лучи) и Солнце.

Химический спектр космических лучей в пересчете энергии на нуклон более чем на 94% состоит из протонов, еще на 4% — из ядер гелия (α -частиц). Есть также ядра других элементов, но их доля значительно меньше. В пересчете энергии на частицу доля протонов составляет около 35%, доля тяжелых ядер соответственно больше. Кроме того, в состав космических лучей входят электроны, позитроны и антиадроны.

Традиционно частицы, наблюдаемые в космических лучах, делят на группы: легкие, средние, тяжелые и сверхтяжелые. Особенностью химического состава первичных лучей является аномально высокое (в несколько тысяч раз) содержание ядер легкой группы (литий, бериллий, бор) по сравнению с составом звезд и межзвездного газа. Данное явление объясняется тем, что частицы космических лучей под воздействием галактического магнитного поля хаотически блуждают в пространстве, прежде чем достигнуть Земли. За время блуждания ядра сверхтяжелой группы могут неупруго взаимодействовать с межзвездным газом и расколоться на более легкие фракции. Данное предположение подтверждается тем, что космические лучи обладают очень высокой степенью изотропии.

В результате взаимодействия с ядрами атмосферы первичные космические лучи (в основном, протоны) создают большое число вторичных частиц — пионов, протонов, нейтронов, мюонов, электронов, позитронов и фотонов. Таким образом, вместо одной первичной частицы возникает большое число вторичных частиц, которые делятся на адронную, мюонную и электронно-фотонную компоненты. Такой каскад покрывает большую территорию и называется **широким атмосферным ливнем**.

В одном акте взаимодействия протон обычно теряет $\sim 50\%$ своей энергии, а в результате взаимодействия возникают в основном пионы. Каждое последующее взаимодействие первичной частицы добавляет в каскад новые адроны,

которые летят преимущественно по направлению первичной частицы, образуя адронное ядро ливня.

Образующиеся пионы могут взаимодействовать с ядрами атмосферы, а могут распадаться, формируя мюонную и электронно-фотонную компоненты ливня. Адронная компонента до поверхности Земли практически не доходит, превращаясь в мюоны, нейтрино и гамма-кванты.

74 Взаимодействие частиц с веществом

Взаимодействие частиц и излучений с веществом

Прохождение тяжелых частиц через вещество

Тяжелая заряженная частица взаимодействует с электрическими полями электронов и атомных ядер. Она либо ионизует, либо возбуждает атомы. Осуществляется также и чисто ядерное взаимодействие частицы с атомным ядром. Основными характеристиками при ионизации являются **средние ионизационные потери** частицы на единицу длины пути, dE/dx , а также ее **полный пробег** в веществе, R .

При прохождении частицы с зарядом Ze мимо электрона происходит передача электрону импульса $p = 2Ze^2/bv$, где v – скорость частицы, b – прицельный параметр (минимальное расстояние между частицей и электроном). За счет взаимодействия частица теряет, а электрон приобретает энергию $p^2/2m_e$. При прохождении частицы через плоскопараллельный слой вещества происходит потеря энергии за счет взаимодействия со всеми электронами. Для полного пробега частицы получим формулу: $R = (M/z^2)f(v_0) + \mathfrak{C}$.

Прохождение легких частиц через вещество

Путь легкой частицы в среде будет не прямолинейным, а извилистым за счет значительной величины изменения импульса частицы при взаимодействии. Если интенсивность пучка тяжелых частиц резко обрывается при достижении глубины, равной R , то интенсивность пучка легких частиц убывает плавно. Можно ввести понятие **максимального и среднего пробега**. Максимальный пробег — минимальная толщина вещества, полностью задерживающая поток частиц. Средний пробег — средняя длина прямолинейного участка пути частицы.

Еще одной особенностью взаимодействия легких частиц с веществом является то, что электрон (позитрон) в результате столкновений излучает (тормозное излучение), т.е. помимо ионизационных появляются и **радиационные потери**.

Кроме того, при движении электрона в среде проявляются *квантовые обменные эффекты*, наблюдающиеся во всякой системе тождественных частиц. Взаимодействие позитрона и электрона среды может привести к их аннигиляции.

Торможение электронов высоких энергий используется в электронных ускорителях для получения пучков γ -лучей. В классическом приближении интенсивность тормозного излучения определяется выражением $w = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2$, где $\dot{v} = F/m_e$ – ускорение электрона. Исходя из этой формулы, получим, что интенсивность излучения при торможении протона в $(m_p/m_e)^2 \approx 3.4 \cdot 10^6$ раз слабее излучения электронов.

Тормозное излучение при взаимодействии электрона с атомом сильно зависит от степени экранирования ЭП ядра атомными электронами. Пренебрегая экранированием, можно утверждать, что теряемая электроном на радиационное торможение энергия пропорциональна плотности вещества и проходимому в нем пути, $-(dE/dx)_{\text{рад}} = E/l_r$, где l_r – **радиационная длина**.

Отношение радиационных потерь к ионизационным можно рассчитать при помощи приближенного соотношения

$$\frac{(dE/dx)_{\text{рад}}}{(dE/dx)_{\text{иониз}}} \approx \frac{EZ}{800},$$

где E измеряется в МэВ. Энергия, $E_{\text{кр}}$, при которой радиационные потери становятся равными ионизационным, называется **критической**: $E_{\text{кр}} \approx 800/Z$. При очень высоких энергиях можно получить формулу для определения энергии электрона: $E = E_0 \exp(-x/l_r)$.

Прохождение γ -частиц через вещество

К γ -излучению относят электромагнитные волны, длина которых значительно меньше межатомных расстояний, т.е. $\lambda \ll 1\text{\AA}$ или $E \gg 12.5\text{ кэВ}$. Наибольший интерес для практических приложений представляет область от десятков кэВ до сотен МэВ.

Теория прохождения γ -излучения через вещество – проблема квантовой электродинамики. За счет электромагнитных взаимодействий γ -излучение поглощается и рассеивается веществом. Однако, радиус взаимодействия γ -квантов и электрона ограничен комптоновской длиной волны электрона (порядка 10^{-13} м), поэтому вероятность таких столкновений довольно мала. Т.к. γ -частицы являются безмассовыми, они не могут замедляться в веществе, взаимодействие приводит только к изменению их траекторий, поглощению или рождению пар частица–античастица. Для квантов нельзя ввести понятие пробега.

При прохождении через вещество интенсивность γ -пучка экспоненциально убывает, подобно закону Бугера: $I(x) = I(0) \exp(-n\sigma x)$, где σ – полное эффективное сечение ослабления, n – концентрация атомов поглотителя. Основными процессами, выводящими кванты из параллельного пучка, являются фотоэффект, эффект Комптона и рождение электронно–позитронных пар.

Отличие фотоэффекта на γ -квантах в том, что электрон не может поглотить или испустить квант такой энергии. Вся энергия кванта передается электрону и атомному остатку (при этом происходит ионизация). Эффективное сечение фотоэффекта сильно зависит от энергии кванта, испытывая резкие падения на энергиях ионизации с i -й оболочки и соблюдая общее падение при увеличении энергии. Вероятность фотоэффекта пропорциональна примерно квадрату заряда ядра, поэтому он наиболее существенен при взаимодействии γ -квантов с тяжелыми ядрами.

При сильном возрастании энергии кванта (больше энергии связи электронов в атоме) наибольшая доля энергетических потерь приходится на эффект Комптона. Сечение рассеяния «мягких» γ -квантов ($h\nu \ll m_e c^2$) на электроне определяется **формулой Томсона**:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2,$$

где r_e – классический «радиус» электрона ($r_e = e^2/m_e c^2 = 2.82 \cdot 10^{-15}$ м). Томсоновское рассеяние является когерентным. Однако, рассеяние квантов с большими энергиями уже не может описываться формулой Томсона и является некогерентным. Вероятность комптоновского рассеяния на ядрах значительно ниже, т.к. в этом случае роль r_e играет величина $Z^2 e^2/M_{яд} c^2$.

При аннигиляции электрона и позитрона должны возникать по меньшей мере два γ -кванта (иначе нарушался бы закон сохранения импульса). Следовательно, свободно распространяющийся квант не может породить пару позитрон–электрон. Однако, рождение таких пар может происходить в электрическом поле ядра. Пары рождаются в околовядерной области толщиной порядка комптоновской длины волны электрона. Импульс отдачи воспринимается ядром, что обеспечивает ЗСИ. Для того, чтобы квант породил электрон–позитронную пару, его энергия должна быть больше энергий покоя этих частиц (порядка 1 МэВ). Если же пара рождается при взаимодействии кванта с электроном, электрон получает энергию того же порядка, что и частица пары, поэтому в данном случае энергия кванта должна существенно превышать 1 МэВ. В области от 2.5 до 25 МэВ расчеты для эффективного сечения образования пары на атомном ядре приводят к выражению

$$\sigma_{пар} \propto Z^2 \ln(\hbar\omega/m_e c^2).$$

При очень высоких энергиях $\sigma_{\text{пар}} \approx 0.08Z^2r_e^2$ из-за экранирования заряда ядра электронами. Для квантов со сверхбольшими энергиями рождение пар становится единственным механизмом поглощения γ -излучения в веществе.

Помимо перечисленных возможны и такие взаимодействия частиц или излучения с веществом как: упругие соударения с атомными ядрами, излучение Вавилова–Черенкова, аннигиляционные потери, ядерный фотоэффект (выбивание из ядер нуклонов), процесс рождения мюонных пар, электрон–позитронные ливни (при сверхбольших энергиях квантов или частиц), наведение радиоактивности.

Принципы и методы ускорения заряженных частиц

Ускоритель заряженных частиц — установка, служащая для ускорения заряженных частиц (элементарных частиц, ионов) до высоких энергий. Простейшее представление об ускорителе дает устройство электронно-лучевой трубы телевизора. Современные ускорители, подчас, являются огромными дорогостоящими комплексами, которые не может позволить себе даже крупное государство. Например, возводимый в настоящий момент Большой адронный коллайдер в ЦЕРНе, представляет собой кольцо периметром 27 км, потребляющее 120 МВт электроэнергии.

В основе работы ускорителя заложено взаимодействие заряженных частиц с ЭП и МП. ЭП способно напрямую совершать работу над частицей, то есть увеличивать ее энергию. МП же, создавая силу Лоренца, лишь отклоняет частицу, не изменяя ее энергии, и задает орбиту, по которой движутся частицы.

Ускорители можно принципиально разделить на две большие группы: линейные ускорители, где пучок частиц однократно проходит ускоряющие промежутки, и циклические ускорители, в которых пучки движутся по замкнутым кривым типа окружностей, проходя ускоряющие промежутки много раз. Можно также классифицировать ускорители по назначению: коллайдеры, источники нейтронов, бустеры, источники синхротронного излучения, установки для терапии рака, промышленные ускорители.

Идеологически наиболее простым является **линейный ускоритель**. Высоковольтное ЭП создается т.н. **генератором Ван де Граафа**, основанном на механическом переносе зарядов транспортерной лентой. Максимальные электрические напряжения ~ 20 МВ определяют максимальную энергию частиц: ~ 20 МэВ.

Идея **циклотрона** проста. Между двумя полукруглыми полыми электродами, т.н. дуантами, приложено переменное электрическое напряжение. Дуанты помещены между полюсами электромагнита, создающего постоянное МП. Частица, вращаясь по окружности в магнитном поле, ускоряется на каждом

обороте ЭП в щели между дуантами. Для этого необходимо, чтобы частота изменения полярности напряжения на дуантах была равна частоте обращения частицы. Иными словами, циклотрон является резонансным ускорителем. Понятно, что с увеличением энергии, на каждом обороте, радиус траектории частицы будет увеличиваться, пока она не выйдет за пределы дуантов. Энергия частиц — до 50 МэВ на нуклон.

Бетатрон — циклический ускоритель, в котором ускорение частиц осуществляется вихревым ЭП, индуцируемым изменением магнитного потока, охватываемого орбитой пучка. Поскольку для создания вихревого ЭП необходимо изменять МП сердечника, а МП в несверхпроводящих машинах обычно ограничены эффектами насыщения железа на уровне ~ 20 кГс, возникает ограничение сверху на максимальную энергию бетатрона. Бетатроны используются преимущественно для ускорения электронов до энергий $10 \div 100$ МэВ (максимум достигнутой в бетатроне энергии — 300 МэВ).

Принципиальное отличие **фазотрона** от циклотрона — изменяемая в процессе ускорения частота ЭП. Это позволяет, за счет автофазировки, поднять максимальную энергию ускоряемых ионов по сравнению с предельным значением для циклотрона. Энергия в фазotronах достигает $600 \div 700$ МэВ.

Синхрофазотрон — циклический ускоритель с постоянной длиной равновесной орбиты. Чтобы частицы в процессе ускорения оставались на той же орбите, изменяется как ведущее МП, так и частота ускоряющего ЭП. Большинство современных циклических ускорителей являются сильнофокусирующими синхрофазотронами. Для ультраквантавистских электронов в процессе ускорения частота обращения практически не меняется, и используются **синхротроны** — циклические ускорители с постоянной длиной орбиты и постоянной частотой ускоряющего ЭП, но изменяющимся ведущим МП.

Кроме научных исследований, небольшие линейные ускорители электронов находят широкое применение в пищевой промышленности (для стерилизации продуктов питания) и медицине (лечение рака).

Методы детектирования частиц

Камера Вильсона — один из первых в истории приборов для регистрации следов (треков) заряженных частиц. Принцип действия камеры использует явление конденсации перенасыщенного пара: при появлении в среде пара каких-либо центров конденсации (в частности, ионов, сопровождающих след быстрой заряженной частицы) на них образуются мелкие капли жидкости. Эти капли достигают значительных размеров и могут быть сфотографированы. Источник исследуемых частиц может располагаться либо внутри камеры, либо вне ее (в этом случае частицы залетают через прозрачное для них окно). Для иссле-

дования количественных характеристик частиц (например, массы и скорости) камеру помещают в МП, искривляющее треки.

Камера Вильсона сыграла огромную роль в изучении строения вещества. На протяжении нескольких десятилетий она оставалась практически единственным инструментом для визуального исследования ядерных излучений. Впоследствии камера Вильсона в качестве основного средства исследования радиации уступила место пузырьковым и искровым камерам.

Пузырьковая камера заполнена жидкостью, которая находится в состоянии, близком к вскипанию. При резком уменьшении давления жидкость становится перегретой. Если в данном состоянии в камеру попадет ионизирующая частица, то ее траектория будет отмечена цепочкой пузырьков пара и может быть сфотографирована.

В качестве рабочей жидкости наиболее часто применяют жидкие водород и дейтерий (криогенные пузырьковые камеры), а также пропан, различные фреоны, ксенон, смесь ксенона с пропаном (тяжеложидкостные пузырьковые камеры). Перегрев жидкости достигается за счет быстрого понижения давления до значения, при котором температура жидкости оказывается выше температуры кипения. Понижение давления осуществляется за время $\sim 5 \div 15$ мс перемещением поршня либо сбросом внешнего давления из объема, ограниченного гибкой мембрани.

Частицы впускаются в камеру в момент ее максимальной чувствительности. Спустя некоторое время, необходимое для достижения пузырьками достаточно больших размеров, камера освещается и следы фотографируются (стереофотосъемка с помощью 2–4 объективов). После фотографирования давление поднимается до прежней величины, пузырьки исчезают, и камера снова оказывается готовой к действию. Весь цикл работы составляет величину менее 1 с, время чувствительности $\sim 10 \div 40$ мс.

Пузырьковые камеры (кроме ксеноновых) размещаются в сильных магнитных полях. Это позволяет определить импульсы заряженных частиц по измерению радиусов кривизны их траекторий.

Пузырьковые камеры, как правило, используются для регистрации актов взаимодействия частиц высоких энергий с ядрами рабочей жидкости или актов распада частиц. В первом случае рабочая жидкость исполняет роли и регистрирующей среды, и среды-мишени. Основное преимущество пузырьковой камеры — изотропная пространственная чувствительность к регистрации частиц и высокая точность измерения их импульсов. Недостаток пузырьковой камеры — слабая управляемость, необходимая для отбора нужных актов взаимодействия частиц или их распада.

Сцинтилляторы — вещества, обладающие способностью излучать свет при поглощении ионизирующего излучения. Как правило, излучаемое количество

фотонов для данного типа излучения приближенно пропорционально поглощенной энергии, что позволяет получать энергетические спектры излучения. Сцинтилляционные детекторы ядерных излучений — основное применение сцинтилляторов. В сцинтилляционном детекторе свет, излученный при сцинтилляции, собирается на фотоприемнике, преобразуется в импульс тока, усиливается и записывается той или иной регистрирующей системой.

Даже при поглощении частиц с одинаковой энергией амплитуда импульса на выходе фотоприемника сцинтилляционного детектора меняется от события к событию. Это связано со статистическим характером процессов сбора фотонов на фотоприемнике и последующего усиления; с различной вероятностью доставки фотона к фотоприемнику из разных точек сцинтиллятора; с разбросом высвечиваемого числа фотонов. В результате, в набранном спектре линия (которая для идеального детектора представляла бы дельта-функцию) оказывается размытой, ее можно представить в виде гауссианы с дисперсией σ . В качестве характеристики энергетического разрешения детектора используется полная ширина линии на половине высоты (FWHM), отнесенная к медиане линии и выраженная в процентах. FWHM в 2,355 раза больше дисперсии гауссианы. Поскольку энергетическое разрешение зависит от энергии (как правило, оно пропорционально $E^{-1/2}$), его следует указывать для конкретной энергии. Чаще всего разрешение указывают для энергии гамма-линии цезия-137 (661 кэВ).

Счетчик Гейгера–Мюллера — газоразрядный прибор для подсчета числа попавших в него ионизирующих частиц. Представляет собой газонаполненный конденсатор, пробивающийся при пролете ионизирующей частицы через объем газа. Дополнительная электронная схема обеспечивает счетчик питанием (как правило, не менее 300 В), обеспечивает, при необходимости, гашение разряда и подсчитывает количество разрядов.

Счетчики Гейгера разделяются на несамогасящиеся и самогасящиеся (не требующие внешней схемы прекращения разряда). Чувствительность счетчика определяется составом газа, его объемом и материалом (и толщиной) его стенок. В бытовых дозиметрах и радиометрах производства СССР и России обычно применяются 400-вольтовые счетчики.

Список сокращений

— А —

- АТТ — абсолютно твердое тело
АЧТ — абсолютно черное тело

— В —

- ВАХ — вольт–амперная характеристика

— Г —

- ГО — гармонический осциллятор
ГУ — граничные условия

— Д —

- ДУ — дифференциальное уравнение

— З —

- зБ — зона Бриллюэна
ЗН — закон(ы) Ньютона
ЗСИ — закон сохранения импульса
ЗСМИ — закон сохранения момента импульса
ЗСЭ — закон сохранения энергии

— И —

- ИГ — идеальный газ
ИК — инфракрасный
ИФП — интерферометр Фабри–Перо

— К —

- КПД — коэффициент полезного действия
КС — консервативная сила
КуБ — кинетическое уравнение Больцмана

— М —

- МП — магнитное поле
МТ — материальная точка

— Н —

- НУ — начальные условия

— О —

ОТО — общая теория относительности

— П —

ПВ — пространство–время

П_дА — принцип д'Аламбера

— Р —

РА — радиоактивность

РВ — радиус-вектор

— С —

СК — система координат

СМТ — система материальных точек

СО — система отсчета

СС — степень свободы

СТО — специальная теория относительности

— Т —

ТД — термодинамика, термодинамический

ТТ — твердое тело

— У —

уЛ — уравнение Лагранжа

уМ — уравнение Мещерского

УМ — уравнения Максвелла

УФ — ультрафиолетовый

уШ — уравнение Шрёдингера

— Ф —

ФП — фазовое пространство

ФП1, ФП2 — фазовый переход 1-го или 2-го рода

— Ц —

ЦТ — центр тяжести

ЦМ — центр масс

— Э —

ЭДС — электродвижущая сила

ЭМВ — электромагнитная волна

ЭМИ — электромагнитная индукция

ЭМП — электромагнитное поле

ЭП — электрическое поле

ЭПР — электронный парамагнитный резонанс

Основные постоянные

Скорость света $c = 2.997925 \cdot 10^8$ м/с.

Число Авогадро $N_A = 6.0225 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

Гравитационная постоянная $G = 6.670 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² = 6.670 · 10⁸ дин·см²/г².

Заряд электрона $e = 1.60210 \cdot 10^{-19}$ Кл = 4.8030 · 10⁻¹⁰ СГС.

Масса электрона $m_e = 9.1091 \cdot 10^{-31}$ кг = 0.5108 МэВ.

Масса протона $m_p = 1.67252 \cdot 10^{-27}$ кг.

Масса нейтрона $m_n = 1.67482 \cdot 10^{-27}$ кг.

Масса α -частицы $m_\alpha = 6.644 \cdot 10^{-27}$ кг.

Число Фарадея $F = eN_A = 9.6487 \cdot 10^4$ Кл = 2.8926 · 10¹⁴ СГС.

Диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ ф/м.

Магнитная проницаемость вакуума $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Постоянная Планка $h = 6.6748 \cdot 10^{-34}$ Дж·с = 6.6748 · 10⁻²⁷ эрг·с.

$$\hbar = h/2\pi = 1.0545 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с.}$$

Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/(\hbar c) = 7.2910 \cdot 10^{-3}$; $1/\alpha = 137.039$.

Комптоновская длина волн $\lambda_0 = h/(m_e c) = 2.42621 \cdot 10^{-12}$ м.

Постоянная Ридберга $R_\infty = \frac{m_e e^4}{4\pi\hbar^3 c} = 1.0973731 \cdot 10^7$ м⁻¹.

Радиус Бора $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2) = 5.29187 \cdot 10^{-11}$ м.

Магнетон Бора $\mu_B = 9.2732 \cdot 10^{-24}$ Дж·Тл⁻¹ = 9.2732 · 10⁻²¹ эрг·Гс⁻¹.

Нормальный объем газа $V_0 = 22.414$ м³/кмоль (л/моль).

Универсальная газовая постоянная $R = 8.3143$ Дж/(моль·К)=
= 1.9858 кал/(моль·К).

Постоянная Больцмана $k = R/N_A = 1.3805 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 5.669 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\text{·К}^4\text{)}.$

Постоянная Вина $b = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ м}\cdot\text{К}.$

Средний радиус Земли 6371 км.

Масса Земли $5.98 \cdot 10^{24}$ кг.

Радиус Солнца $6.96 \cdot 10^8$ км.

Масса Солнца $1.99 \cdot 10^{30}$ кг.

Среднее расстояние от Земли до Солнца $1.496 \cdot 10^8$ км.

Важнейшие формулы векторного анализа

Скалярное произведение двух векторов

$$\vec{A}\vec{B} = AB \cos(\widehat{\vec{A}\vec{B}}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Векторное произведение двух векторов

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin(\widehat{\vec{A}\vec{B}}).$$

Оператор «набла»

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор Лапласа, $\Delta = \nabla^2$

декартовы координаты

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z};$$

сферические координаты (R, θ, α)

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2};$$

цилиндрические координаты (R, θ, z)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Градиент, дивергенция и ротор

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi; \quad \text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}; \quad \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}.$$

Теорема Остроградского–Гаусса (V – объем, охватываемый поверхностью S)

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} dV.$$

Теорема Стокса (S – поверхность, натянутая на замкнутый контур L)

$$\oint_L \vec{A} d\vec{L} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S}.$$

Теорема Грина

$$\int \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = \int (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV$$

Повторное дифференцирование

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times \nabla \varphi = 0;$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0;$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi;$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times [\nabla \times \vec{A}] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

Связь между некоторыми единицами

Сила $1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин} = 1/9.81 \text{ кгс.}$

Работа, энергия $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг} = 0.239 \text{ кал} = 2.78 \cdot 10^{-7} \text{ кВт}\cdot\text{ч.}$

Мощность $1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ Эрг/с} = 0.102 \text{ кгс}\cdot\text{м/с} = 1.36 \cdot 10^{-3} \text{ л.с..}$

Заряд $1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ} = 0.1 \text{ СГСМ.}$

Напряженность $1 \text{ В/м} = 3.34 \cdot 10^{-5} \text{ СГСЭ} = 10^6 \text{ СГСМ.}$

Электрическое смещение $1 \text{ Кл/м} = 3.77 \cdot 10^6 \text{ СГСЭ} = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ СГСМ.}$

Потенциал $1 \text{ В} = 3.34 \cdot 10^{-3} \text{ СГСЭ} = 10^8 \text{ СГСМ.}$

Емкость $1 \text{ Ф} = 8.99 \cdot 10^{11} \text{ см} = 10^{-9} \text{ СГСМ.}$

Сила тока $1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ} = 0.1 \text{ СГСМ.}$

Сопротивление $1 \text{ Ом} = 1.11 \cdot 10^{-12} \text{ СГСЭ} = 10^9 \text{ СГСМ.}$

Магнитная индукция $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс} = 3.34 \cdot 10^{-7} \text{ СГСЭ.}$

Магнитный поток $1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс} = 3.34 \cdot 10^{-3} \text{ СГСЭ.}$

Напряженность магнитного поля $1 \text{ А/м} = 1.26 \cdot 10^{-2} \text{ Э} = 3.77 \cdot 10^8 \text{ СГСЭ} = 10^{-2} \text{ Ав/см.}$

Индуктивность $1 \text{ Гн} = 10^9 \text{ см} = 1.11 \cdot 10^{-12} \text{ СГСЭ.}$

Литература

- [1] А.Н. Матвеев. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
- [2] А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986.
- [3] А.Н. Матвеев. Молекулярная физика. М.: Высшая школа, 1987.
- [4] А.С. Давыдов. Квантовая механика. М.: Наука, 1973.
- [5] В.И. Блохинцев. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1983.
- [6] Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976.
- [7] Д.В. Сивухин. Общий курс физики. В пяти томах. М.: Наука, 1989.
- [8] И.В. Савельев. Курс общей физики. В трех томах. М.: Наука, 1970.
- [9] И.И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
- [10] И.П. Базаров. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1983.
- [11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 1973.
- [12] Л.Л. Гольдин, Г.И. Новикова. Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988.
- [13] Н.И. Жирнов. Задачник–практикум по электродинамике. М.: Просвещение, 1964.
- [14] С.Г. Калашников. Электричество. М.: Наука, 1985.
- [15] Физическая энциклопедия. В пяти томах. М.: Сов. энциклопедия, 1988.
- [16] Э.В. Шпольский. Атомная физика. В двух томах. М.: Наука, 1974.
- [17] Ю.Ф. Голубев. Основы теоретической механики. М.: изд. МГУ, 1991.
- [18] <http://wikipedia.org> — «Википедия» — самый большой в мире электронный учебник.

Предметный указатель

- γ-излучение, 323
Р–N переход, 172
Аромат кварков, 316
Адроны, 313
Адиабата, 96
Адиабатическое приближение, 268
Акустика, 70–71
Акцептор, 172
Аморфное тело, 114
Аэростатика, 50
Антиферромагнетизм, 161
Анизотропия, 113
Барионы, 313
Барн, 298
Работа
 силы, 23
 выхода, 230
 тока, 147
Рассеяние, 265
 света, 86
 виды, 265
 частиц, 26
 комбинированное, 87
 Мандельштама–Бриллюэна, 87
 молекулярное, 86
Равенство Клаузиуса, 101
Равновесие
 термодинамическое, 82
 тепловое, 75
Распределение
 Больцмана, 84, 173
 биномиальное (Бернулли), 78
 Гиббса, 76
 Максвелла, 82
 Максвелла–Больцмана, 85
 нормальное (Гауссово), 74, 79
 Пуассона, 79
Радиационное трение, 198–199
Радиус
 Дебая, 130
 электрона, 199
Радиоактивность, 293
Разрешающая способность, 212
Бра–вектор, 241
Реактивность, 299
Резонанс, 66, 167
 параметрический, 66
Резонансы, 313
Решетка Браве, 115
Релаксация, 94
Биения, 62
Бином Ньютона, 78
Ближняя зона, 207
Бозе–конденсат, 252, 277, 283
Бозон, 251
Ряд Фурье, 62
Варикап, 173
Вакуум, 124, 313
Валентная аппроксимация, 272
Валентность, 267
Самоиндукция, 154, 163
Среднее, 74
Время
 релаксации, 65, 94, 121, 167
 собственное, 36, 184
 когерентности, 61
Сверхтекучесть, 279
Сверхтонкая структура, 259
Сверхпроводимость, 177, 278
Связи, 12
Связь

- JJ*, 258
Рёссел–Саундерсова, 258
химическая, 268
Статистическая сумма, 77
Статистический ансамбль, 75, 78, 284
Статистика
Бозе–Эйнштейна, 251, 281
Ферми–Дирака, 170, 251, 281
Максвелла–Больцмана, 251
Стандартное отклонение, 79, 85
Странность, 312
Стереохимия, 270
Степени свободы, 15
Степень
ионизации, 129
Степень свободы, 88
Степень поляризации, 218
Сдвиг, 48
Супермультиплеты, 316
Серии излучения водорода, 236
Вероятность, 74
Сечение
рассеяния, 265
рассеяния, 27
эффективное, 88, 130
Вечный двигатель, 99
Вектор
Бюргерса, 117
сжатия, 49
волновой, 170
Умова–Пойнтинга, 70, 182, 193
намагничения, 155
поляризации, 141
Сцинтиллятор, 327
Взаимодействие
Блоховское, 175
сильное, 309
слабое, 310, 319
спин–орбитальное, 241, 256
гравитационное, 310
частиц с веществом, 322–323
излучения с веществом, 323–325
электрослабое, 314, 319
электромагнитное, 309, 315–316
электрон–фононное, 174
Взаимоиндукция, 163
Счетчик Гейгера–Мюллера, 328
Вибратор Герца, 182
Система, 93
автоколебательная, 66
статистическая, 75
термодинамическая, 93
изолированная, 94
консервативная, 25
координат
главная, 47
линейная, 64
материальных точек, 11
эргодическая, 94
отсчета
замкнутая, 21
инерциальная, 13
неинерциальная, 31
Виды поляризации, 218
Видность, 200
Сила, 13
осциллятора, 216
Ампера, 180
реакции связи, 12
Ван дер Ваальса, 104
в СТО, 38
сторонняя, 148
тока, 138, 146
центральная, 15
коэрцитивная, 160
консервативная, 24
Лоренца, 153
Лоренца, 17, 180, 193
электродвижущая, 148
объемная, 50

- обобщенная, 16, 18
обобщенно-потенциальная, 33
ядерная, 303
поверхностная, 50
потенциальная, 24
пондеромоторная, 142, 149
- Символика Браве, 114
Синглет, 240
Сингония, 115
Синус интегральный, 209
Синхротрон, 326
Синхротронное излучение, **232–233**
Синхрофазotron, 326
Скин-эффект, 139
Скобки Пуассона, **20**
Скорость, 10
 света, 182, 193
 секторная, 28
 групповая, 196, 212, 216
 угловая, 10
 фазовая, 68, 196, 212, 216
 характерная, 83
 критическая, 59
 линейная, 10
 наивероятнейшая, 83
 объемного расширения, 56
 относительная, 31
 представление, 10
 переносная, 31
- Вырождение, 281
Случайная величина, 74
Внутренняя конверсия, 295
Собственное значение, 242
Состояние, 241
 равновесное, 78
 стационарное, 93
 собственное, 242
 квазистационарное, 249
 макроскопическое, 78, 93, 102
 метастабильное, 107
- микроскопическое, 78, 93, 102
Восприимчивость
 диэлектрическая, 113
 магнитная, 113
Соударение тел, 25
Волчок, 41
Волна
 стоячая, 69
 спиновая, 162
 ударная, 71
 де Бройля, 231
 звуковая, 70
 капиллярная, 127
 монохромная, 196
 парциальная, 266
 продольная, 68
 поперечная, 68
- Волны, **67–71**
 ленгмюровские, 130
Волновая поверхность, 68
Волновой пакет, 195
Соотношения
 коммутационные, 252
 неопределенностей, 252
Соотношения Максвелла, 77, 111
Соотношения неопределенности, 231
Сопротивление, 147
Спектр, 196
 излучения, 209
 дискретный, 246
 квазинепрерывный, 246
 комбинированный, 87
 пространственный, 197
Спектральный анализ, 211
Спектральный терм, 236
Вязкость, 55
 динамическая, 122
Сpirаль Френеля, 205
Сpirаль Корню, 207
Спин, 240, 256, 311

- ядра, 292
- Гармонический анализ, 62
- Гармоника, 69
- Газ
- реальный, 104
 - вырожденный, 251
 - идеальный, 77, 93
- Гамильтониан, 246
- Гамма–излучение, 295
- Гравiton, 310
- Траектория, 10
- фазовая, 75
- Трансляция, 114
- Транзитивность, 94
- Границные условия, 138
- Трубка тока, 51, 146
- Тройная точка, 118
- Терм, 240, 258
- Течение, 59
- Тембр, 71
- Температура, 75, 82, **93–94**
- абсолютного кипения, 121
 - статистическая, 76
 - вырождения, 251, 282
- Дебая, 99
- инверсии, 109
- Кюри, 161
- критическая, 105
- Нееля, 161
- Генератор Ван де Граафа, 325
- Тензор
- диэлектрической восприимчивости, 142
 - момента инерции, 40
 - напряжений, 142
 - напряжений, 47
- Теорема
- Резаля, 42
 - Винера–Хинчина, 201
- Гюйгенса, 41
- Ирншоу, 135
- Штейнера, 40
- Карно
- вторая, 102
 - первая, 102
- Кёнига, 43
- Кирхгофа–Гельмгольца, 208
- Лармора, 34, 158
- Лиувилля, 75, 124, 284
- Эренфеста, 243
- Эйлера, 44
- Остроградского–Гаусса, 135, 145
- о равномерном распределении E_k
- по СС, 88
 - о движении центра масс, 11, 22
 - об изменении импульса, 21
 - оптическая, 266
- Теория
- Аббе, 212
 - БКШ, 179
 - Великого объединения, 314
 - суперструн, 314
 - возмущений, 250
 - нестационарная, **301–302**
 - Гайтлера–Ландена, 267
 - Друде–Лоренца, 169
 - Косселя, 267
 - мезонная, 307
 - относительности, 34
- Теплота
- скрытая, 119
 - фазового перехода, 118
- Теплоемкость, 95
- Теплообменник, 109
- Гироскоп, 44
- Гиромагнитное отношение, 157, 159, 255, 259
- Гистерезис, 160
- Гидростатика, 50

- Гиперзаряд, 312
Главная плоскость, 220
Глюоны, 313, 317
Тождество Якоби, 20
Точка Кюри, 120
Ток
 смещения, 180
 Фуко, 162
 молекулярный, 155
 электрический, 146
 элементарный, 152
Голография, 198, 211
Тонкая структура, 240, 259

Давление, 47
 магнитное, 131
Дальняя зона, 207

Уравнение
 адсорбции Гиббса, 126
 Бернули, 52
 реологическое, 56
 Ван дер Ваальса, 106
 Власова, 286
 Смолуховского, 92
 стационарности, 147
 стохастическое, 91
 состояния, 50, 93, 110
 идеального газа, 80
 волновое, 69, 182, 193
Гамильтона–Якоби, **20–21**
Грэда–Шафранова, 131
Гельмгольца, 196, 207
Гиббса–Гельмгольца, 77, 112
термическое, 94
термодинамики основное, 77
гидростатики
 основное, 50
Дирака, **288–289**
д'Аламбера, 182
движения, 15

Шрёдингера, 170, 243
Клапейрона–Клаузиуса, 119
кинетического баланса, 288
колебаний
 гармонического осциллятора, 60
 затухающих, 64
 перпендикулярных, 63
Лагранжа, 16, **16–17**
 для НИСО, 32
Ланжевена, 91
Лапласа, 137
Лиувилля, 124, 284
Майера, 96
Максвелла, 139
Мещерского, 22
Менделеева–Клапейрона, 51, 81, 94
моментов, 28
Навье–Стокса, 57, 191
Эрнфеста, 120
Эйлера, 50
Эйнштейна, 230
неразрывности, 55
непрерывности, 123, 147, 191
эйконала, 21
энергии, 93
нормалей Френеля, 220
Пуассона, 135, 151
переноса, 121
плоской волны, 68

Уравнения
 Гайзенберга, **242–243**
 Гамильтона, **19**
 Максвелла, 179, 192
 материальные, 189, 192
 Эйлера
 динамические, 43
 кинематические, 44
Уровень Ферми, 170
Движение, 10

- брауновское, 89
 вращательное, 90–91
 поступательное, 89–90
 в центрально-симметричном по-
 ле, **28–30**
 спутников, 30
 твердого тела, 13
 уравнения, 14
 закон, 10
 количество, 14
 описание, 10
Ускорение, 10
 Кориолисово, 31
 переносное, 31
Ускоритель, **325–326**
Углы Эйлера, 12
Угол
 Брэгга, 210
 Брюстера, 219
 собственного вращения, 44
 нутации, 44
 прецессии, 44
Удар, 25
 Удельная рефракция, 216
Детандер, 109
Детекторы, **326–328**
 Дефект кристалла, 116
 Дефект массы, 291, 307
 Деформации и напряжения, **46–47**
 Деформация, 46
 Децибел, 71
 Действие, 16
 Дейтерий, 304
 Декремент затухания, 167
 логарифмический, 65
Диаграмма
 весовая, 316
 векторная, 61, 205
 Фейнмана, 310
 направленности, 86, 183
 Диамагнетизм, 157
 Диамагнетик, 157
 Дисперсия, 74, 79, 211
 угловая, 212
 линейная, 212
 Дифракционная решетка, 210
 Дифракция, 204
 Рамана–Ната, 210
 Брэгга, 210
 Френеля, 205
 на краю экрана, 206
 на экране, 206
 на отверстии, 205
 Диффузия, 122
 Диэлектрическая восприимчивость,
 141, 144
 Диэлектрическая проницаемость,
 141
 Диэлектрик, 143, 171
 Диод, 173
 Диполь, 135
 Дырка, 171
Длина
 радиационная, 323
 свободного пробега, 87, 130
 связи, 268
 волны, 67, 182
 дифракционная, 207
 приведенная, 42
Длина волны
 комптоновская, 233
 Ультрафиолетовая катастрофа, 224
 Ультразвук, 70
 Добротность, 167
 Домен, 160
 Донор, 172
Фаза, 118
 волны, 68
 Шубникова, 178

- Фазовая пластинка, 206, 221
Фазовый
 переход, 118
 сдвиг, 266
 множитель, 244
 объем, 251
Фазовое пространство, 75, 241
Фазotron, 326
Фактор Ланде, 259, 263
Естественное уширение, 223
Фурье–анализ, 197
Фурье–синтез, 197
Функция
 аппаратная, 212
 Бриллюэна, 159
 Бесселя, 210
 Блоха, 170, 273, 278
 распределения вероятности, 74
 волновая, 170, 243
 Гамильтона, 19
 Грина, 197, 208
 Дирака, 75
 Фрёлиха, 278
 Кирхгофа, 198, 224
 Лагранжа, 16, **16–17**
 Ланжевена, 112, 144, 159
 мультиплективная, 76
Ферромагнетизм, 161
Ферромагнетизм, 160
Ферромагнетик, 157
Фермион, 251
Фигуры Лиссажу, 63
Флуктуация, 85
Флюксметр, 156
Емкость, 140
 барьерная, 173
 диффузионная, 173
Формула
 Бальмера, 236
 Бальмера–Ридберга, 240
Бернулли, 78
Резерфорда, 27, 266
Бейцеккера, 307
Рэлея, 216
Рэлея–Джинса, 224
Больцмана, 103
барометрическая, 51, 85
Саха, 129
Стирлинга, 79
Стокса, 60
Вина, 224
сложения ускорений, 31
Гагена–Пуазейля, 57
Томсона, 324
Жуковского–Кутта, 54
Крамерса–Кронига, 214
Клаузиуса–Моссотти, 145
Ланжевена–Дебая, 144
Лорентца–Лоренца, 216
Лоренца, 199
Эйнштейна, 90
Остроградского–Гаусса, 56
Планка, 198, 225, 229
Формулы Френеля, 219
Фотоупругость, 222
Фотон, 315
Фотоэффект, 229
Фотопроводимость, 229
Фонон, 174, 276
Характерное время, 309
Химический потенциал, 281
Цвет кварков, 316
Центр
 качания, 42
 масс, 22
Цепочка Боголюбова, 285
Жидкости, **125–126**
Цикл
 Бете, 320

- термодинамический, 100
 Карно, 100
 Клаузиуса–Ранкина, 100
 Клапейрона, 100
Цикл Карно, 102
Циклические процессы, 100
Циклотрон, 325
Циклотронное излучение, 232
- Заряд**
 барионный, 306, 312
 свободный, 141
 лептонный, 311
 электрический, 311
 поляризационный, 141
- Частота**
 биений, 62
 стоксова, 87
 волны, 67
 Лармора, 34, 157
 ленгмюровская, 287
 основная, 69
 плазменная, 130, 217
- Задача**
 Циолковского, 23
 механики, 14
- Закон**
 Архимеда, 50
 Авогадро, 81
 Ампера, 150
 Бугера–Ламберта, 195
 Бугера–Ламберта–Бэра, 217
 Бугера–Ламберта–Фабриканта, 227
 Био–Савара–Лапласа, 150
 Блоха, 162
 Бэра, 195
 Рэлея, 86
 Стефана–Больцмана, 224
 Столетова, 229
- Снеллиуса, 200, 219
 смещения Вина, 224
 сохранения, 21, 312
 импульса, 18, 21
 момента импульса, 27
 момента импульса ТТ, 43
 энергии, 18, 23, 25
Гука, 46, 47
Джоуля, 96
Джоуля–Ленца, 148, 169
Дюлонга и Пти, 97
Фарадея, 162
Фурье, 122
Фика, 122
 инерции, 13
Кулона, 134
Керра, 222
Кеплера, 29
Кирхгофа, 224
Кюри, 113, 158
Кюри–Вейсса, 161
 кубов Дебая, 99
Лапласа, 126
Ленца, 154
Малюса, 218
Ньютона
 второй, 14
 второй для СТО, 38
 третий, 14
 для напряжений, 57
 первый, 13
Ньютона–Стокса, 122
 электромагнитной индукции, 154, 162
Ома, 147, 169
 дифференциальный, 139
Паскаля, 50
 подобия течений, 58
Четырехвектор, 184
Четность, 292, 311

- зарядовая, 312
- Число
- Авогадро, 91
 - Рейнольдса, 58
 - магнитное, 131
 - Струхаля, 58
 - волновое, 68, 182
 - Фруда, 58
 - Френеля, 205
 - Циолковского, 23
 - Маха, 58
 - массовое, 312
- Золотое правило Ферми, **302**
- Зоны Бриллюэна, 170, 273
- Зоны Френеля, 205
- Зонная теория, 272
- Зонная пластинка, 206
- Испарение, 125
- Шум, 71
- Изгиб, 49
- Излучение
- тепловое, 223
 - тормозное, 230
- Изобары, 291
- Изоспин, 306, 312
- Изотропия, 198
- Изотермическая система, 76
- Изотоны, 291
- Изотоп, 259, 291
- Изоморфизм, 116
- Импульс, 18
 - в СТО, 38
 - силы, 14
 - тела, 14
 - обобщенный, 18
- Интервал, 37
 - релятивистский, 183
- Интерференция, 199
- Интерферометр
- Фабри–Перо, 203
- Майкельсона, 200
 - звездный, 202
- Юнга, 202
- Интеграл
- столкновений, 285
 - стояний, 76
 - Гюйгенса–Френеля, 205
 - движения, **17–18**
 - Фурье, 63
 - Кирхгофа–Гельмгольца, 207
 - обменный, 161
- Интенсивность звука, 71
- Индуктивность, 154, 163
- Индукция
- магнитная, 150
 - электрическая, 141
 - электрического поля, 135
 - остаточная, 160
- Индекс Миллера, 116
- Инфразвук, 70
- Картина Эйри, 210
- Калибровка Лоренца, 182
- Калибровочная инвариантность, 137
- Камера Вильсона, 326
- Канал реакции, 298
- Канонические распределения, **75–76**
- Кручение, 48
- Кристалл, 113, 220
 - жидкий, 117
- Кристаллизация, 125
- Критерий
- Рейнольдса, 59
 - Фруда, 59
- Кварки, 313, 316
- Квазистационарные явления, 151
- Квазистационарные поля, 164
- Квазичастицы, 173
- Квант, 229

- Кванты, 313
 Квантование
 вторичное, **303**
 Квантовый дефект, 240, 261
 Квантовое число
 главное, 255
 магнитное, 159, 254
 орбитальное, 254
 полное, 259
 Куперовские пары, 179, 278
 Кинетическое уравнение Больцмана,
 128
 Кэт–вектор, 241
 Космические лучи, **321–322**
 Когерентность, 200
 Колебания, **60–67**
 апериодические, 65
 свободные, 60
 вынужденные, 65
 гармонические, 60
 в контуре, 165
 добротность, 65
 затухающие, 64
 когерентные, 61
 нормальные, 168
 поляризованные, 63
 Компрессор, 109
 Конденсатор, 140
 Коэффициент
 размножения, 299
 сжимаемости, 49
 взаимной индукции, 154
 вириальный, 106
 сопротивления, 147
 вязкости, 56
 теплопроводности, 122
 диффузии, 90, 122
 упаковочный, 291
 упругости, 48
 затухания, 167
 лобового сопротивления, 59
 Эйнштейна, 226
 Пуассона, **48**
 подъемной силы, 59
 полезного действия, 102
 Конфигурация электронная, 258
 Лазер, 227
 на свободных электронах, **233–234**
 Лептоны, 313, 318
 Линия тока, 51, 146
 Лоренцева форма, 223
 Лоренцево смещение, 259, 264
 Люминесценция, 226
 Марковский процесс, 92
 Масса, 13, 311
 в СТО, 38
 гравитационная, 14
 инертная, 14
 электрона эффективная, 274
 приведенная, 239
 переменная, 22
 Матрица
 Дираха, 289
 Материальная точка, 15
 Магическое число, 307
 Магнетик, 157
 Магнетон Бора, 159, 255
 Магнитная восприимчивость, 155
 Магнон, 162
 Маятник
 Фуко, 33
 уравнение движения, 34
 физический, 41
 Мультиплет, 240
 Мультиплетность, 259
 Метод
 Гиббса, 123, 284
 темного поля, 197

- фазового контраста, 198
Лампerta, 83
магнитного охлаждения, 110
эффективной массы, 274
- Механизмы ядерных реакций, **300–301**
- Мезоатомы, 239
Мезоны, 313
Мода лазера, 228
Модуль
 сдвига, 48
 кручения, 49
 Юнга, **47–48**
Модуль Юнга, 67
Модуляция, 195
Модель
 атома векторная, 262
 Бардина–Пайнса, 177
 БКШ, 278
 Блоха, 174
 Гаусса, 290
 Томсона, 236
 твердого тела, 271
 Ферми, 290
 Планетарная, 236
Мощность тока, 148
Момент
 силы, 27, 39
 гирокопический, 46
 дипольный, 135
 импульса, 28, 39
 инерции, 40, 49
 центростремительный, 40
 полярный, 40
 квадрупольный, 136
 магнитный, 152, 259, 311
 наведенный, 158
 орбитальный, 241
Монокристалл, 114
- Н–теорема, **128–129**
Наблюдаемая, 241
 совместная, 246
 полная, 246
Насыщаемость связи, 268
Натяжение, 47
Начало ТД
 второе, 101
 третье, 104
 первое, 95, 99
Напряжение, 46
 магнитное, 151
 на участке цепи, 148
 электрическое, 147
Напряженность
 магнитная, 150
 магнитного поля, 155
 электрического поля, 134
Эргодическая гипотеза, 85, 103, 284
ЭДС, 148
 магнитной индукции, 154
Нуклеосинтез, **320–321**
Нуклиды, 291
Нуклон, 303
Неравенство Клаузиуса, 102
Несжимаемая жидкость, 52
Эффект
 Баркгаузена, 160
 Рамзауэра, 266
 туннельный, 248
 Джоуля–Томсона, 108
 Допплера, 71, 210
 Фарадея, 222
 Холла, 153
 Черенкова–Вавилова, **232**
 Зеемана, 259, 264
 Штарка, 265
 изотопический, 239, 259
 Керра, 222
 Коттона–Муттона, 222

- Комптона, 230, **233**
 Магнуса, 54
 Мёссбауэра, 296
 Пашена–Бака, 264
 Нейтринно, 294, 319
 Нейтронный избыток, 291
 Эквибара, 50
 Экситон, 174, 277
 Электромагнитные волны, 192
 Электронный парамагнитный резонанс, 264
 Электроотрицательность, 271
 Электропроводимость, 147, 169
 Элементарная ячейка, 114
 Энталпия, 77, 108, 110
 Энтропия, 101
 Энергетическая зона, 274
Энергия
 свободная, 76, 77, 110
 связи, 268, 291
 внутренняя, 77, 110
 возбуждения, 299
 упругая, 48
 критическая, 323
 кинетическая, 24
 ТТ, 43
 механическая, 18
 электрического поля, 138
 обменная, 161
 потенциальная, 25
 покоя, 39
 Обратная решетка, 273
 Орбиталь молекулярная, 268
 Обертон, 71
 Обменные силы, 306
 Обменное взаимодействие, 267
 Обобщенная координата, 16
 Обобщенные координаты, 15
 Оси намагничения, 160
 Очарование, 312
 Определитель Слэттера, 273
 Оператор, 241
 возмущения, 250
 Лапласа, 137
 линейный, 243
 эрмитов, 243
 эволюции, 242
Опыт
 Аббе–Поттера, 197
 Резерфорда, 289
 Томсона и Тартаковского, 232
 Девиссона–Джермера, 231
 Франка и Герца, 238
 Майкельсона, 34
Опыты Лебедева, 194
Пара сил, 27
Парadox
 близнецов, 38
 гидростатический, 51
 д'Аламбера, 52
Парамагнетизм, 158
Парамагнетик, 157
Параметр
 вырождения, 251, 282
 макроскопический, 102
Параметры
 термодинамические, 93
 интенсивные, 93
 экстенсивные, 93
Правила
 Хунда, 262
 Кирхгофа, 148
 отбора, 241, 270, 295
Правило
 рекомбинационного запрета, 270
 Стокса, 226
 Фейнмана, 310
 фаз Гиббса, 119

- Жуковского, 46
Ленца, 162
Прецессия, 45
Преобразование симметрии, 114
Преобразования
Галилея, 36
Лоренца, 35, 183
Приближение
адиабатное, 173
Борна–Оппенгеймера, 272
Фраунгофера, 208
Френеля, 208
Хартри–Фока, 272
Кирквуда, 126
Прицельный параметр, 130
Принцип
д’Аламбера, 32
суперпозиции
сил, 14
электрического поля, 134
виртуальных перемещений, 17
соответствия, 36, 237, 242
Гамильтона вариационный, **15–16**
Гюйгенса, 204
Гюйгенса–Френеля, 204
д’Аламбера–Лагранжа, 17
детального равновесия, 75, 287
дискретности, 241
дополнительности, 252
Франка–Кондона, 270
запрета Паули, 251
изоспиновой инвариантности, 306
комбинационный, 236
ле Шателье–Брауна, 112
Нернста, 104
неопределенности, **252–253**
эквивалентности, 14
ослабления корреляции, 285
относительности, 35
Паули, 170, 256
обобщенный, 306
Проводимость, 147
собственная, 171
удельная, 147
Проводник, 169, 171
Протон, 290
Процесс, 95
релаксационный, 121
марковский, 287
политропный, 97
Прочность связи, 268
Промежуточные бозоны, 318
Проницаемость
диэлектрическая, 113, 140
комплексная, 214
магнитная, 113, 155
Ядро атома, 290
Ядерные реакции, **297–298**
Ядерный реактор, **298–300**
Пузырьковая камера, 327
Период волны, 67
Плазма, **129–131**
Плазмон, 277
Плечо силы, 39
Плоскость поляризации, 182, 218
Плотность
энергии ЭП, 142
вероятности, 74
спектральная, 198
тока, 138, 146
молекулярного, 155
заряда
объемная, 135
поверхностная, 138, 139
импульса, 194
энергии ЭП, 138
потока вероятности, 244
Постулат
равновероятности, 78

- термодинамики
 второй, 94
 нулевой, 94
 первый, 94
 Планка, 237
 Постулаты Бора, 237
 Постоянная
 Ридберга, 236
 Больцмана, 81
 решетки, 114
 Ван дер Ваальса, 106
 Стефана–Больцмана, 224
 Верде, 222
 газовая универсальная, 81
 тонкой структуры, 241, 256
 Холла, 153
 капиллярная, 127
 магнитная, 150
 Планка, 225, 229
 Поверхностные явления, **126–127**
 Потенциал
 термодинамический, 77
 Бардина–Шокли, 175
 Вуда–Саксона, 304
 самосогласованного поля, 286
 векторный, 151
 четырехмерный, 185
 скоростей, 53
 Гиббса, 77, 110, 118
 термодинамический, 110
 химический, 113, 119, 251
 Леннарда–Джонса, 105
 электрического поля, 134
 Юкавы, 304
 обобщенный, 17
 Поглощение света, 195
 Поток, 135
 магнитный, 154
 энергии, 70
 Потокосцепление, 163
 Подвижность электронов, 169
 Подобные течения, 58
 Позитроний, 239
 Показатель
 адиабаты, 96
 преломления, 195
 комплексный, 214
 поглощения, 195
 политропы, 97
 Полушкирина, 203
 Полупроводник, 171
 Поле
 самосогласованное, 257, 272
 сильное, 263
 скоростей, 51
 слабое, 263
 Политропа, 97
 Поликристалл, 114
 Полиморфизм, 116
 Полином Чебышева–Эрмита, 247
 Поляризатор, 218
 Поляризация, 141
 Поляризуемость, 215
 Полярон, 176, 280
 Пояс Роговского, 157

*Емельянов Эдуард Владимирович
Емельянова Алёна Викторовна*

**Методические рекомендации по подготовке к ГАК
для студентов специальности «физика»**

Подписано в печать 22 сентября 2008 г.
Фомат 60 × 80 1/16. Тираж 1 экз. Цена договорная.

Отпечатано в домашней типографии Емельянова Э.В.