

1 Изучение ПЗС–матриц

1.1 Краткие теоретические сведения

Основными характеристиками ПЗС матрицы являются:

- масштаб изображения, \gg /pix;
- динамическое разрешение (разрядность АЦП), бит;
- квантовая эффективность QE , %;
- эффективность сбора заряда (CCE), %;
- эффективность переноса заряда (CTE), %;
- предельно допустимый уровень сигнала, ADU;
- коэффициент перевода ADU в электроны ($gain$), \bar{e}/ADU ;
- шум считывания, \bar{e} .

Ошибки, возникающие при использовании матрицы:

1. связанные со статистикой фотонов:

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{N \cdot gain}}{gain},$$

где N — накопленный ячейкой матрицы сигнал (в ADU);

2. связанные с шумом считывания:

$$\sigma_2 = \sqrt{\pi} \cdot \sigma_r \cdot R,$$

где σ_r — шум считывания на 1 пиксель, R — радиус апертуры матрицы, pix;

3. ошибки шума считывания, связанные с коррелированными изменениями bias'a:

$$\sigma_3 = \sigma_{cor} \cdot \omega \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}},$$

где σ_{cor} — уровень нулевого смещения (bias), ω_0 — эффективная ширина коррелированной структуры, pix, $\omega = \frac{16}{3\pi}R$, R — апертура матрицы, pix;

4. ошибки, связанные с расстоянием между объектом и звездой сравнения (при фотометрии), вызванные неоднородностью температуры поверхности ПЗС матрицы и неоднородностью атмосферной экстинкции. В первом приближении они равны

$$\sigma_4 = \sigma_D \cdot D,$$

где D — расстояние между измеряемым объектом и стандартной звездой, σ_D — некоторый эмпирический коэффициент.

Выходной сигнал с элемента $M_{x,y}$ матрицы можно представить в виде

$$I_{x,y} = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S_{x,y}(\lambda) P_{x,y}(\lambda) d\lambda + N_{x,y},$$

где λ_{min} и λ_{max} — граничные длины волн для света, попавшего в данную ячейку (в дальнейшем будем определять этот диапазон по центральной длине волны $\lambda = (\lambda_{max} - \lambda_{min})/2$; $S_{x,y}$ — спектральная чувствительность ячейки; $P_{x,y}$ — частотная характеристика попавшего на элемент сигнала и $N_{x,y}$ — шум данной ячейки. Выходной спектр будет представлять собой дискретный набор усредненных по ячейкам и зашумленных сигналов.

Проведем исследование ПЗС камеры VNI-743 потребительского класса с ПЗС матрицей ICX-259AL фирмы SONY в качестве светоприемника телескопа. Камера имеет следующие паспортные данные:

- размер рабочей зоны камеры — 7.95×6.45 мм ($5.17' \times 4.19'$),
- число рабочих элементов матрицы — 752×582 ,
- размер пикселя — 6.5×6.25 мкм ($\sim 0.25''$),
- расстояние между центрами пикселей — 10.6×11.1 мкм,
- минимальная освещенность объекта при $S/N = 10$ и светосилой объектива $F/0.8$ составляет $6 \cdot 10^{-5}$ люкс,
- выходной поток данных соответствует стандартному видеосигналу с частотой от 4 до 30 кадров в секунду,
- разрядность АЦП камеры — 8,
- при изменении освещенности камера меняет режимы работы: производит суммирование по площади изображения, по кадрам, а также изменяет автоматически коэффициент усиления.

Для измерения характеристик камеры необходимо равномерно засветить ее входной зрачек, например, при помощи светодиода зеленого свечения (см. рис. 1) (основная длина волны около 550\AA). Светодиод (2) подключается к импульсному источнику питания $U = 5$ В (1) через балластный резистор $R = 15$ кОм. Частота импульсов $\nu = 1$ кГц значительно превосходит частоту кадровой развертки камеры ($\nu_{cam} \leq 30$ Гц), что создает условия, аналогичные непрерывной засветке.

Изменение светового потока, попадающего на ПЗС матрицу производится путем изменения скважности Q импульсов генератора. Длительность импульсов изменяется с шагом 1 мкс, что позволяет задавать величины потока от 0 до максимального значения Φ_{max} , определяемого параметрами светодиода и схемой установки.

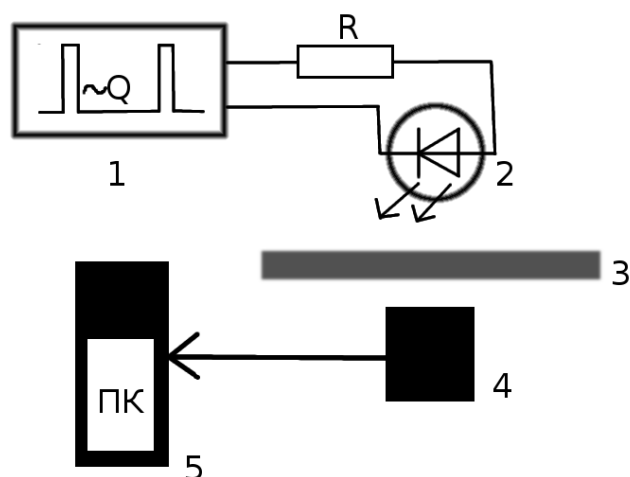


Рис. 1: Схема установки для измерения характеристик ПЗС камеры.

Равномерность засветки камеры (4) достигается за счет использования диффузора (3) (нескольких тонких слоев поролона), расположенного между камерой и светодиодом.

Сигнал, полученный камерой, поступает на устройство видеозахвата персонального компьютера (5). Полученные изображения далее обрабатываются в том или ином специализированном пакете (например, Matlab или MIDAS) для учета темнового тока и получения статистических данных.

Зависимость выходного сигнала камеры от величины светового потока приведена на рис. 2. На графике отчетливо видны границы между режимами камеры ($5 \div 7$ и $26 \div 30$ единиц), на которых происходит переключение камеры в режим большей (при уменьшении освещенности) или меньшей (при увеличении освещенности) чувствительности. Отчетливо видно явление гистерезиса: при увеличении освещенности поверхности матрицы свыше 29 отн. ед. происходит переход камеры из второго в третий режим работы. При последующем уменьшении освещенности камера переходит во второй режим работы уже на 26 отн. ед. освещенности. Гистерезис необходим для того, чтобы небольшие флуктуации яркости в этой области не приводили камеру в состояние хаотических переключений между режимами. Для научного же использования явление гистерезиса в кривой чувствительности светоприемника недопустимо, т.е. в этом случае необходимо выбирать такой режим работы камеры, который не будет затрагивать пограничных и нелинейных областей.

Оценим диапазон звездных величин, которые можно зафиксировать данной ПЗС камерой при размещении ее в фокусе Кассегрена 43-см телескопа обсерватории Ставропольского Государственного Университета.

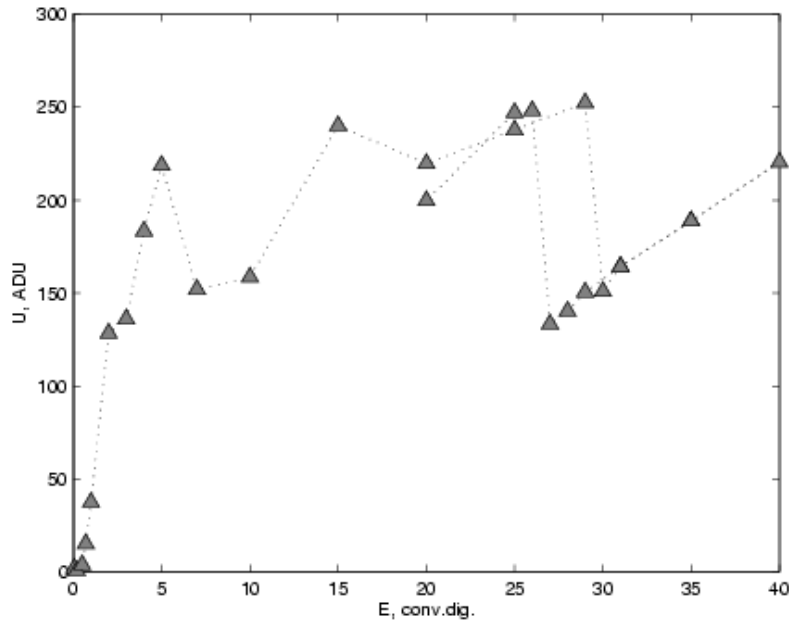


Рис. 2: Зависимость выходного сигнала камеры от ее освещенности (в широком диапазоне изменения освещенности).

Видимая звездная величина m_v связана с блеском звезды E формулой

$$m_v = -2.5 \lg B - 14. \quad (1.1)$$

При двухсекундном качестве изображения диаметр турбулентного диска звезды будет составлять 5 пикселей матрицы. Следовательно, свет будет распределен между 24-мя пикселями матрицы. Энергия света от звезды, проходящая через телескоп (без учета френелевских потерь) составляет $B \cdot (S_{prim} - S_{sec})$ Вт, где S_{prim} и S_{sec} — площади первичного и вторичного зеркал соответственно. Подставляя численные значения, получим: $E = 0.14B$.

Френелевские потери на каждом зеркале составляют около 5%, а коэффициент отражения для одной поверхности защитного стекла матрицы рассчитывается по формуле

$$\rho = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2,$$

где n — коэффициент преломления защитного стекла (около 1.5). Следовательно, потери на матрице составят 8%, а суммарный коэффициент пропускания системы «телескоп+матрица» составит 0.83. Отсюда, выражение для расчета энергии света, попадающей на поверхность ПЗС примет вид

$$E_s = 0.11B,$$

следовательно, освещенность элементов ПЗС матрицы в изображении звезды будет равна

$$E_1 = E_s/S_{star} = E_s/2.424 \cdot 10^{-9} = 45.4 \cdot 10^6 B, \quad (1.2)$$

где S_{star} — площадь изображения турбулентного диска звезды в фокальной плоскости телескопа, S_{pix} — площадь одного пикселя ПЗС-матрицы.

Из (1.1) и (1.2) получим:

$$m_{v\ main} = -2.5 \lg E_1 + 5.14. \quad (1.3)$$

Следовательно, минимальная освещенность ПЗС матрицы ($6 \cdot 10^{-5}$ люкс) будет соответствовать блеску звезды звездной величины 15.7.

Для гида телескопа с относительным отверстием 1/11.4 и диаметром объектива 140 мм выражение (1.3) примет вид:

$$m_{v\ guide} = -2.5 \lg E_1 + 5.40, \quad (1.4)$$

что незначительно отличается от (1.3). Из выражений 1.3 и 1.4 следует, что, благодаря различным масштабам изображения в фокальной плоскости, уменьшение апертуры телескопа еще не означает уменьшения его проникающей силы, чего, к сожалению, нельзя сказать о его разрешении.

Линейный участок рабочего диапазона камеры отвечает изменению освещенности матрицы в 35.7 раз, что соответствует 3.88 звездным величинам с погрешностью измерений от 0.04^m в конце рабочего участка до 0.14^m в его начале.

При попадании фотонов на элемент ПЗС матрицы происходит «выбивание» нескольких фотоэлектронов, которые накапливаются в потенциальной яме ячейки. В рабочей (линейной) области матрицы количество фотоэлектронов пропорционально количеству фотонов.

Число фотоэлектронов, накопленных в ячейке ПЗС матрицы за время экспозиции, равно

$$N_e = qN_\gamma + \delta_e + q\delta_\gamma,$$

где N_γ — количество фотонов, попавших на ячейку матрицы за один цикл накопления; q — квантовая эффективность матрицы (будем считать ее одинаковой для всех ячеек); δ_e — шум считывания ячейки; δ_γ — межпиксельная флуктуация потока фотонов (особо проявляется при слабых потоках излучения).

Тогда при усреднении по кадру получим

$$\overline{N_e} = q\overline{N_\gamma} + \overline{\delta_e} + q\overline{\delta_\gamma}. \quad (1.5)$$

В выражении (1.5) $\overline{\delta_e} = 0$. При малых потоках света и малых выдержках, когда за время экспозиции на пиксели попадает всего несколько фотонов, δ_γ может

коррелировать с положением пикселя. При достаточно больших потоках и выдержках можно с уверенностью положить $\delta_\gamma = 0$. Флуктуации количества накопленных электронов являются случайной величиной, имеющей гауссово распределение. Поэтому $\overline{\delta_\gamma} = 0$. Следовательно, получим $\overline{N_e} = q\overline{N_\gamma}$ и:

$$q = \frac{\overline{N_e}}{\overline{N_\gamma}}. \quad (1.6)$$

Число фотоэлектронов N_e можно оценить по уровню фототока ($I_\gamma = \frac{N_e \cdot e}{T}$, где e – заряд электрона, T – время наблюдения), либо, исходя из количества отсчетов: $N_e = GS$, где G – коэффициент преобразования электроны \rightarrow отсчеты («gain»), зависящий от разрядности АЦП и коэффициента усиления выходного сигнала.

Количество фотонов N_γ , попавших за время наблюдения на элемент матрицы, можно определить, найдя при помощи люксметра освещенность матрицы E . Тогда поток излучения, падающего на элемент, равен $\Phi = E \cdot s$, где s – площадь элемента матрицы. Так как $\Phi = dE/dt$, получим, что за время экспозиции T на элемент матрицы попадет энергия $\varepsilon = \Phi \cdot T = EsT$. Следовательно, для монохромного излучения

$$N_\gamma = \frac{EsT}{h\nu}.$$

В качестве монохроматического источника излучения можно использовать полупроводниковый лазер, монохроматор, либо узкополосный светофильтр. Однородной засветки ПЗС и люксметра можно добиться, поместив в параллельный монохроматический пучок излучения рассеивающий элемент.

Найдя таким образом величины, входящие в правую часть (1.6), можно определить квантовую эффективность ПЗС матрицы.

Обозначим $S = G\overline{N_e}$ – считанный сигнал в ADU (аналогово-цифровых единицах), $n = q\overline{N_\gamma}$ – количество фотоэлектронов, накопленных в ячейке ПЗС матрицы за время экспозиции, B – уровень смещения, δ_S – случайная ошибка, вносимая при считывании. Тогда получим:

$$S = Gn + \overline{B} + \delta_S. \quad (1.7)$$

Стоит заметить, что при больших выдержках к сигналу добавляется довольно значительный шум, связанный с термоэлектронами, количество которых пропорционально времени наблюдения. Для того, чтобы из подобного изображения выделить «чистый» сигнал, получают «темновые кадры» при закрытом затворе матрицы с выдержкой, равной выдержке основного кадра. На малых экспозициях темновые токи не вносят сколь-нибудь заметного вклада в уровень выходного сигнала, поэтому их можно исключить из уравнения (1.7).

B можно представить в виде $B = \bar{B} + \delta_B$, где усреднение проводится по всей матрице, а δ_B — отклонение шума считывания от среднего значения для каждого пикселя. Для большого количества элементов при стабильном состоянии матрицы $\bar{\delta}_B = 0$.

Вычитая из (1.7) B , получим выражение для сигнала, по большей части освобожденного от шумов: $S' = S - B = Gn + \delta_B + \delta S$. Усредняя последнее выражение, получим:

$$\bar{S}' = G\bar{n} + \bar{\delta}_S + \bar{\delta}_B. \quad (1.8)$$

Так как $\bar{\delta}_S = \bar{\delta}_B = 0$, то

$$\bar{S}' = G\bar{n}. \quad (1.9)$$

Дисперсия S' : $D_{S'} = \overline{(S' - \bar{S}')^2}$. Подставим в это выражение значения из (1.8) и (1.9), раскроем квадрат и отбросим слагаемые вида \overline{ab} , где a и b — не коррелирующие между собой величины (так как среднее их произведения равно 0). Тогда получим:

$$D_{S'} = G^2 D_n + D_B + D_S. \quad (1.10)$$

В выражении (1.10) D_S имеет тот же смысл, что и D_B , так как это — та же самая дисперсия считанного сигнала, следовательно $D_B = D_S$ и

$$D_{S'} = G^2 D_n + 2D_S.$$

Обозначим $\sigma_S = \sqrt{D_S}$ — шум считывания ПЗС матрицы. Дисперсию количества накопленных электронов можно найти, учитывая тот факт, что для каждого пикселя оно распределено по Пуассону, следовательно, $D_n = \bar{n}$ и $D_{S'} = G^2 \bar{n} + 2\sigma_S^2$. Из (1.9) получим:

$$D_{S'} = G\bar{S}' + 2D_S.$$

Величины $D_{S'}$ и \bar{S}' можно непосредственно измерить, поэтому, чтобы найти G и σ_S , достаточно осуществить несколько серий испытаний для разных уровней освещенности, построить по полученным данным график $D_{S'} - \bar{S}'$, и аппроксимировать его прямой методом наименьших квадратов. Из полученного уравнения прямой $\langle D_{S'} \rangle = \langle G \rangle \bar{S}' + D_S^0$, можно выразить искомые параметры:

$$\langle G \rangle = \frac{d\langle D_{S'} \rangle}{d\bar{S}'},$$

то есть G — коэффициент наклона графика $D_{S'} - \bar{S}'$.

$$\sigma_S = \sqrt{\frac{1}{2} D_{S'}^0},$$

$2D_S$ — точка пересечения графика с осью ординат.

1.2 Задания для самостоятельного выполнения

Создадим модель рассмотренного выше эксперимента для проверки справедливости его выкладок. Сопоставим ПЗС-матрице матрицу размером 752×582 . Сделаем эту матрицу трехмерной: пусть первая координата соответствует номеру измерения (*для каждой величины освещенности необходимо провести не менее десяти измерений*), вторая — координате x изображения, третья — координате y изображения: $\text{CCD}(10, 752, 582)$.

Мы рассматриваем ПЗС потребительского класса, работающую при комнатной температуре. В этом случае наибольшее значение из всех шумов будет иметь тепловой шум (термоэлектронная эмиссия).

Для упрощения будем считать, что можно пренебречь всеми шумами ПЗС-матрицы, кроме шума квантования, шума считывания и темнового шума. Также в первом приближении будем считать все ячейки ПЗС идентичными (т.е. с абсолютно одинаковыми характеристиками). Также будем считать, что матрица работает в одном и том же режиме.

Пусть матрица обладает следующими характеристиками:

- gain $G = 10 \bar{e}/\text{ADU}$;
- тепловой шум $\sigma_T = 25 \bar{e}/\text{с}$;
- шум считывания $\sigma_S = 5 \bar{e}$;
- максимальный уровень сигнала $I_{max} = 240 \text{ ADU}$;
- квантовая эффективность в видимой области $q = 0.7 \bar{e}/\text{фотон}$;
- смещение (bias) $\bar{B} = 10 \text{ ADU}$.

Для исследования будем освещать матрицу монохромным излучением с $\lambda = 550 \text{ \AA}$. Будем для простоты считать, что люксметр дает точные значения освещенности, а кривая чувствительности матрицы является линейной во всем допустимом диапазоне освещенностей. Длительность экспозиции примем равной $T = 0.1 \text{ с}$. Освещенность матрицы будем изменять от $5 \text{ МэВ}/\text{с}\cdot\text{м}^2$ до $500 \text{ МэВ}/\text{с}\cdot\text{м}^2$.

Оцените, достаточен ли этот интервал для исследования ПЗС. Рассчитайте более точно рабочий диапазон освещенностей данной ПЗС.

Разбейте рабочий диапазон освещенностей на десять равноотстоящих участков. Для каждого значения освещенности необходимо рассчитать величину \bar{N}_e — среднее количество фотоэлектронов, накопленных в каждой ячейке. Затем по формуле (1.7) рассчитать средний уровень сигнала, пока не внося ошибки. Этим значением необходимо инициализировать массив данных:

```
S = G*q*N+B;
One = ones(752,582)
for A = [1:10]
CCD1(A, :, :) = One*S;
end
```


1.2 Задания для самостоятельного выполнения

Теперь рассчитайте общую величину шума $\sigma = \sigma_T + \sigma_S$. Оценить его величину в дБ можно по формуле: $\sigma_{dB} = 20 \lg(I_{max}/\sigma)$. Вычислите эту величину и назовите ее `noise_dB`. Теперь добавьте для каждого слоя различный шум:

```
for A
CCD1(A, :, :) = awgn(CCD1(A, :, :), noise_dB, 'measured');
end
```

Аналогичные операции повторите для других значений освещенности. В итоге вы получите десять переменных `CCD1`, ..., `CCD10`, в которых находятся данные по десяти измерениям на каждое значение освещенности.

Получите массив смещений (их надо сделать всего 10) и их медианное значение:

```
for A
BIAS(A, :, :) = awgn(Ones*B, noise_dB, 'measured');
end
B_med = median(BIAS);
```

Теперь получите массив медиан для каждой десятки измерений с коррекцией на `bias`:

```
med = median(CCD1 + B_med);
med(2, :, :) = median(CCD2 + B_med);
.....
med(10, :, :) = median(CCD10 + B_med);
```

Среднее значение освещенности в каждом случае можно вычислить при помощи функции `mean`, например,

```
for A
sig(A) = mean(mean(med(A, :, :)));
end
```

По приведенным в теории формулам рассчитайте значения q , G , σ , \bar{B} . Определите значение предельной звездной величины, доступной при наблюдении с данной матрицей на телескопе диаметром $D = 30$ см и эквивалентным фокусным расстоянием $F = 200$ см.

Астрофизика, спецпрактикум

2 Получение изображений при помощи идеального телескопа

2.1 Краткие теоретические сведения

В идеальном телескопе при отсутствии атмосферы форма изображения точечного источника (в данном случае — звезды) определяется только явлением дифракции («кружок Эйри») и описывается функцией Эйри:

$$P_0(\vec{r}) = K \left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi D|\vec{r}|}{\lambda F}\right)}{\frac{\pi D|\vec{r}|}{\lambda F}} \right]^2, \quad (2.1)$$

где:

$P_0(\vec{r})$ — интенсивность света в фокальной плоскости от источника с единичной интенсивностью как функция координаты \vec{r} ;

K — нормировочный коэффициент;

λ — длина волны света;

D — диаметр апертуры телескопа;

$J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка.

При $J_1(x) = 0$ наблюдаются дифракционные минимумы. Первым корнем этого уравнения является $x = 3.8317\dots$, ему соответствует первый дифракционный минимум с линейным радиусом $1.22\lambda\frac{F}{D}$. Чаще всего именно эта величина считается мерой разрешения идеального телескопа (согласно критерию Рэлея).

Изображение $I(\vec{r})$ астрономического объекта с распределением интенсивности $O(\vec{r})$ можно рассматривать как совокупность кружков Эйри (2.1), т.е. осуществить свертку:

$$I(\vec{r}) = \int O(\vec{r}') P_0(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' = O \otimes P_0. \quad (2.2)$$

Соотношение (2.2) носит название **уравнения изображения**.

За счет дифракции разрешение изображения уменьшается, однако, для реального телескопа дифракционное уменьшение разрешения является наименьшим по сравнению с остальными эффектами.

▶ Оптика телескопа вносит искажения волнового фронта, связанные с различными аберрациями. Выбор системы телескопа обычно обосновывается задачами, для которых разрабатывается данный телескоп, полосой пропускания, размером апертуры. Кроме того, происходят потери излучения при его отражении от поверхностей оптики телескопа или внутри линз.

Рассмотрим аберрации, свойственные сферическим и параболическим зеркалам.

Сферическое зеркало. Сферическая аберрация: $\rho_{\text{сф}} = \frac{A^3 f_0}{64}$. Кома: хвост — $3\rho_k$ ширина — $2\rho_k$, где $\rho_k = \frac{A^2 \omega f}{16}$, $A = \frac{2H}{f_0}$.

В этих формулах: H — расстояние от главной оси, ω — угол наклона луча к главной оси, f_0 — идеальное фокусное расстояние.

Астигматизм характеризуется такими терминами, как *меридиональная плоскость* — плоскость, в которой лежат падающий и отраженный лучи и *сагиттальная плоскость* — плоскость, перпендикулярная меридиональной.

Длины фокали (отрезка, на котором пересекаются падающие лучи): $l_{\text{мер}} = A_{\text{саг}} \omega^2 f_0$, $l_{\text{саг}} = A_{\text{мер}} \omega^2 f_0$, где A_x — угол расходимости лучей в соответствующей плоскости (относительное отверстие пучка в данной плоскости).

Астигматизм и кому компенсируют внесением внеосевой пластинки Шмидта (или мениска) и установкой выпуклого зеркала, либо — установкой двух объективов с взаимно перпендикулярными меридиональными плоскостями.

Следствие астигматизма — **кривизна поля**: $R_M = \frac{4f^3}{4f^2 - 3c^2}$, $R_C = \frac{4f^3}{4f^2 - c^2}$. Здесь c — расстояние от апертурной диафрагмы до центра кривизны сферического объектива.

Параболическое зеркало. Длина комы: $\delta l_K = \frac{\alpha f (3z^2 + z)^4}{1 - z^2}$, где α — угловой размер входной или выходной диафрагмы, $z = \frac{x}{2f}$, x — полуширина пучка. У сферы $3\alpha f z^2$ меньше, чем δl_K параболы.

Длина астигматической фокали: $l_{\text{ас}} = \frac{4\alpha^2 f z (1 + z^2)^2}{(1 - z^2)^2}$. У сферы при больших z $4\alpha^2 f z$ меньше, чем у параболы.

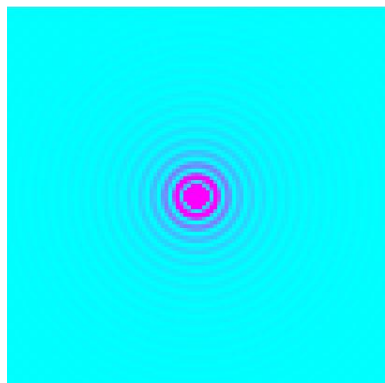
Сфера имеет преимущество перед параболой в случае, когда $\frac{z^3 f}{2} < \alpha f \frac{3z^2 + z^4}{1 - z^2}$, или $z < 6\alpha$, т.е. $A < 24\alpha$ для осевых пучков и $\frac{z^3 f}{2} < 3\alpha f (z_2^2 - z_1^2)$ для внеосевых.

При равных фокусном расстоянии и относительном отверстии сфера предпочтительнее при $z^2 < 12\alpha(z_1 + z_2)$ или $A^2 < 96\alpha \sin \theta_{\text{ср}}$, где $\theta_{\text{ср}}$ – угол между геометрической осью параболоида и осевым лучом пучка после отражения.

Таким образом, параболоиды можно применять лишь при малых углах отклонения пучка от геометрической оси, т.е. в телескопической системе наилучшим будет применение параболического зеркала.

2.2 Примеры практических заданий

Построим модель изображения звезды в идеальном телескопе в отсутствие атмосферы (изображение приведено слева).



В первом приближении не будем интересоваться коэффициентами в формуле (2.1). Рассмотрим лишь приближенную картину, которая получится в результате деления квадрата функции Бесселя первого порядка на квадрат ее аргумента. Так как формула (2.1) имеет центральную симметрию, ее аргументом должен быть радиус-вектор точки в плоскости изображения. Зададим поле изображения размером 101×101 пиксель. Для удобства задания координат пикселя, будем ха-

рактеризовать координатную плоскость полем комплексных чисел Z , считая $x = \Re(Z)$, $y = \Im(Z)$. Функция Бесселя i -го порядка $y = J_i(x)$ задается командой `y=besselj(i,x)`. Так как в Matlab не реализован метод разрешения неопределенностей вида $0/0$, в центре изображения после деления $J_i(0)/0$ получится NaN, т.е. необходимо вручную проинициализировать затем это значение единицей:

```
>> Z=ones(1,101)'+[-50:50]+i*[50:-1:-50]'+ones(1,101);
    % массив координат пикселей
>> Bes = besselj(1,sqrt(real(Z).^2+imag(Z).^2));
    % функция Бесселя для массива Z
>> Im=Bes.^2./(real(Z).^2+imag(Z).^2); % инициализация изображения
>> Im(51,51)=1; % исправление ошибки в центре изображения
>> imshow(Im) % отображение полученной картины
```

Функция `imshow` позволяет производить различные манипуляции с изображениями. Для получения качественного рисунка необходимо повысить контраст и сменить цветовую карту (пункт `Adjust colormap` в меню `imshow`).

Теперь отобразите разрез изображения на $y = 0$ и одно из крыльев:

```
plot([-50:50],Im(51,:));
```

```
plot([6:51], Im(51, [56:end]));
```

Последняя строка отображает «хвост» функции Эйри — побочные дифракционные максимумы.

Более наглядно отобразить полученную картину можно при помощи функции `surf`: наберите `surf(Im)` и вы увидите распределение линий уровня, визуализированное трехмерной поверхностью.

Согласно уравнению (2.2), для получения модели изображения в фокальной плоскости телескопа, необходимо свернуть неискаженное изображение с функцией Эйри. Создадим «изображение» двух звезд с координатами (30, 30) и 70, 70:

```
>> Stars=zeros(101);  
>> Stars(30,30)=1;  
>> Stars(70,70)=1;  
>> imtool(Stars)
```

Теперь для выполнения свертки воспользуемся свойством Фурье-преобразований: $\mathcal{F}(A \otimes B) = \mathcal{F}(A) \cdot \mathcal{F}(B)$. Таким образом, функцию (2.2) можно представить в виде: $I = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(O) \cdot \mathcal{F}(P_0))$. Двумерное преобразование Фурье выполняет функция MATLAB `fft2`, а обратному преобразованию соответствует функция `ifft2`. Однако, функция `ifft2` полагает, что нулевая частота образа расположена в его углах, поэтому для получения «правильного» изображения необходимо осуществить преобразование результата функции `ifft2` при помощи функции `fftshift`.

Итак, получим изображение:

```
>> Stars_real = fft2(Stars).*fft2(Bes);  
>> Stars_real = ifft2(Stars_real);  
>> Stars_real = fftshift(Stars_real);  
>> imtool(Stars_real)
```

Обратите внимание, что произведение Фурье-образов выполняется почленно (пропустив точку перед знаком умножения вы получите неверный результат).

2.3 Задания для самостоятельного выполнения

1. Оцените дифракционный предел разрешения для телескопов диаметром 6 м и 30 см.

2. По аналогии с приведенным примером, постройте изображение звезды в фокальной плоскости идеального телескопа с диаметром главного зеркала $D = 40$ см, фокусным расстоянием $F = 2.5$ м на длине волны $\lambda = 500$ нм в области размером 20×20 мкм, разбив ее на 201 ячейку по вертикали и горизонтали, т.е. строка инициализации координат примет вид:

```
Z=ones(1,201) '*[-100:100]+i*[100:-1:-100] '*ones(1,201);
```

однако, аргументом функции Бесселя должно быть значение $\pi Dr/(\lambda F)$, поэтому можно для удобства создать еще одну матрицу:

```
x=pi*D*Z*1e-5/lambda/F;
```

объясните, для чего вводится коэффициент 10^{-5} . Значение нормировочного коэффициента считайте равным единице.

Отобразите получившееся изображение при помощи функций `imtool`, `plot` и `surf`.

3. Теперь смоделируйте изображение нескольких звезд в идеальном телескопе с параметрами, указанными в предыдущем задании. «Звезды» расположите в точках с координатами (10, 10), (50, 100), (198, 198), 30, 200. Обратите внимание, что при преобразовании `fft` \Rightarrow `ifft` возникают краевые эффекты: изображение «звезды» с координатами (198, 198) окажется размытым на все четыре угла.
4. Аналогично предыдущему заданию создайте изображение светлого диска. Для создания диска используйте команды:

```
>> for x=1:201;
for y=1:201;
if((x-100)^2+(y-100)^2-2500<0.01) XX(x,y)=1;
end
end
end
```

5. По формуле для сферической аберрации рассчитайте полуширину аппаратной функции (ФРТ) аберрации. Считайте параметры телескопа теми же, что и в предыдущих заданиях. Считайте, что светоприемник расположен на расстоянии $H = 3$ см от оптической оси телескопа. Постройте изображение из задания 3 с учетом сферической аберрации.

Аппаратную функцию сферической аберрации считайте гауссианой со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 1/2\rho_{\text{сф}}$. Если `rho` — рассчитанный радиус аберрации, то построить гауссиану можно при помощи команды (здесь используются уже созданные вами массивы данных):

```
Gauss = normpdf(sqrt(real(Z).^2+imag(Z).^2),0,rho);
FGauss=fft2(Gauss);
```

Второй строчкой создается фурье–образ аппаратной функции, т.е. ОПФ aberrации. Перемножив ОПФ aberrации и фурье–образ изображения, а затем выполнив для результата обратное преобразование фурье, получите изображение, искаженное сферической aberrацией.

6. Создайте модель изображения из предыдущего задания, но еще и с учетом астигматизма. Для этого создайте изображение решетки и ее искажения:

```
>> Resh=zeros(201); % инициализация нулями
>> Resh([50:50:200],:)=1; % горизонтальные участки
>> Resh(:,[50:50:200])=1; % вертикальные участки
>> Badresh=(normpdf([1:201],50,2.7)'+normpdf([1:201],100,2.7)'+...
normpdf([1:201],150,2.7)')*ones(1,201);
% горизонтали искаженной решетки
>> Badresh(:,[50:50:200])=1; % вертикали искаженной решетки
```

(условимся считать, что астигматизм расширяет на 5.4 пикселя горизонтальные участки изображения и никак не сказывается на вертикальных). Вычислите ОПФ астигматизма A , учтя что $\mathcal{F}(I) = \mathcal{F}(I_0) \cdot A$, т.е. $A = \mathcal{F}(I)/\mathcal{F}(I_0)$, где I – искаженное изображение решетки, I_0 – ее оригинал. Далее перемножив ОПФ астигматизма с фурье–образом изображения, полученного в предыдущем задании и выполнив операции обратного преобразования Фурье и коррекции на начало координат, получите изображение звездного неба, искаженное дифракционными эффектами, сферической aberrацией и астигматизмом.