# Методические рекомендации к решению контрольных работ по математике

*Емельянов Эдуард Владимирович*

# Пояснительная записка

Данное пособие предназначено для студентов 2-го курса СПО, изучающих предмет „Математика" и его можно рассматривать как приложение к рабочей программе по математике. В пособии рассмотрены основные вопросы математического анализа:

- **Предел последовательности, предел функции**
- **Дифференциальное исчисление**

  а) нахождение производной функции как предела

  б) нахождение первых производных простых и сложных функций,

  в) производные высших порядков.
- **Интегральное исчисление**

  г) нахождение неопределенных интегралов,

  д) нахождение определенных интегралов,

  е) интегрирование по частям.
- **Дифференциальные уравнения**

  ж) дифференциальные уравнения первого порядка,

  з) линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков,

  и) линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков.

Каждый раздел содержит примеры решения заданий, выносимых на контрольные работы, и пояснения к ним. При решении заданий используется теоретический материал, даваемый студентам на лекциях.

# 1 Предел функции

▶ **Задача 1.**

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+7}$

## Решение:

Для нахождения подобных пределов необходимо вычислить наибольшую степень переменной (в числителе и знаменателе) и разделить на нее и числитель, и знаменатель дроби. Тогда можно найти отдельно пределы числителя и знаменателя, воспользовавшись свойствами пределов и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. В данном случае наибольшая степень — 3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{4+\dfrac{7}{n^3}} = \frac{1}{4}$$

Следует заметить, что в двух случаях подобные пределы можно вычислить, пользуясь следующим алгоритмом:

- Если степень числителя больше степени знаменателя, предел равен $\infty$.
- Если степень числителя меньше степени знаменателя, предел равен 0.

▶ **Задача 2.**

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

## Решение:

В данном случае налицо неопределенность $\dfrac{0}{0}$, но ее легко разрешить, преобразовав числитель и знаменатель и сократив подобные:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{x}{x-3} = \pm\infty$$

▶ **Задача 3.**

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

## Решение:

Данный случай похож на предыдущий пример, но здесь необходимо умножить числитель и знаменатель на выражение, позволяющее избавиться от неопределенности, в данном случае необходимо выбрать выражение $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$:

$$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=1$$

► **Задача 4.**

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$

## Решение:

Для того, чтобы избавиться от неопределенности $1^\infty$, преобразуем данный предел ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/4}\right)^{(x/4)\cdot 4}=\mathrm{e}^4$$

Такое преобразование справедливо, т.к. если $x\to\infty$, то и $cx\to\infty$.

► **Задача 5.**

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

## Решение:

Преобразуем данную функцию, чтобы показать, что она содержит в себе два первых замечательных предела (так как $x\to 0$, то и $cx\to 0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin 5x}{5x\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x/5x}{\sin 3x/3x}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

# 2 Дифференциальное исчисление

## 2.1 Нахождение производной функции как предела.

► **Задача 1.**

Найти производную функции $y = sin(x)$ из определения производной.

### Решение:

Необходимо вспомнить определение производной: производной функции $f(x)$ называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Т.о. нахождение производной сводится к нахождению вышеуказанного предела. Найдем значение приращения функции:

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

раскрываем формулу синуса суммы:

$$\Delta f = \sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x.$$

Для нахождения предела вспомним, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$y' = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot 1 - \sin x}{\Delta x} + \\ + \lim_{x \to 0} \frac{\sin \Delta x \cos x}{\Delta x} = \cos x.$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

► **Задача 2.**

Найти из определения производной производную функции $f(x) = x^2 + x$.

### Решение:

Найдем приращение функции: $\Delta f = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - x^2 - x = x^2 + 2x\Delta x + x + \Delta x - x^2 - x = 2x\Delta x + \Delta x$.

Теперь найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x}{\Delta x} = 2x + 1.$$

Следовательно, $(x^2 + x)' = 2x + 1$.

## 2.2 Табличное дифференцирование

▶ **Задача 3.**

Найти производную функции $y = \sin x + \sqrt[3]{x}$.

### Решение:

Воспользуемся свойствами производной суммы $(u+v)' = u' + v'$:

$$y' = (\sin x)' + (\sqrt[3]{x})' = \cos x + (x^{\frac{1}{3}})' = \cos x + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$
$$= \cos x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \cos x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Следовательно, $y' = \cos x + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

▶ **Задача 4.**

Найти производную функции $y = \ln x + x^2 \cdot \sqrt{x}$.

### Решение:

$$y' = \frac{1}{x} + (x^{\frac{5}{2}})' = \frac{1}{x} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{5}{2}\sqrt{x^3}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2}\sqrt{x^3}$.

## 2.3 Производная произведения/частного нескольких функций

▶ **Задача 5.**

Найти производную функции $y = (x^2+1)\cos x$.

### Решение:

Воспользуемся формулой производной произведения функций: если $y = uv$, то $y' = u'v + uv'$. Следовательно,

$$y' = (x^2+1)'\cos x + (x^2+1)(\cos x)' = 2x\cos x + (x^2+1)(-\sin x) =$$
$$= 2x\cos x - (x^2+1)\sin x.$$

Ответ: $y' = 2x\cos x - (x^2+1)\sin x$.

► **Задача 6.**

Найти производную функции $y = \dfrac{x^3 - 2}{3x + 6}$.

## Решение:

Воспользуемся формулой производной частного двух функций: если $y = u/v$, то $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Отсюда получим:

$$y' = \frac{(x^3 - 2)'(3x + 6) - (x^3 - 2)(3x + 6)'}{(3x + 6)^2} = \frac{3x^2(3x + 6) - (x^3 - 2) \cdot 3}{(3x + 6)^2} = \\ = \frac{6x^3 + 18x^2 + 6}{(3x + 6)^2}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{6x^3 + 18x^2 + 6}{(3x + 6)^2}$.

► **Задача 7.**

Найти производную функции $y = x^2 \ln x$.

## Решение:

$$y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

Ответ: $y = x(2 \ln x + 1)$.

## 2.4 Производная сложной функции

► **Задача 8.**

Найти производную функции $y = \lg \ln x$.

## Решение:

Согласно формуле дифференцирования сложной функции, если $y = u\big(v(x)\big)$, то $y' = \dfrac{du}{dv}\dfrac{dv}{dx} \equiv u'_v \cdot v'_x \quad (*)$.

Пусть $v(x) = \ln x$, тогда $u(v) = \lg v$, $\Rightarrow u'_v = \frac{1}{v \ln 10}$ (т.к. $\lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$), $v'_x = \frac{1}{x}$. Подставляя эти значения в формулу $(*)$, получим:

$$y' = \frac{1}{\ln x \ln 10} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x \ln 10}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{1}{x\ln x \ln 10}$.

► **Задача 9.**

Найти производную функции $y = \mathrm{e}^{3x^2-2x}$.

## Решение:

$v = 3x^2 - 2x$, $u = \mathrm{e}^v$; $v'_x = 6x - 2$, $u'_v = \mathrm{e}^v$. Следовательно, получаем: $y' = (6x-2)\,\mathrm{e}^{3x^2-2x}$.

# 3 Интегральное исчисление

## 3.1 Простой неопределенный интеграл

► **Задача 1.**

Найти интеграл $\mathfrak{I} = \int (x^2 + \sqrt{x})\,dx$.

## Решение:

Воспользуемся свойством интеграла суммы двух функций: $\int \big(f(x)+u(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int u(x)\,dx$. Следовательно,

$$\mathfrak{I} = \int x^2\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} + \mathfrak{C} = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \mathfrak{C}.$$

Окончательно, преобразовав $x^{\frac{3}{2}}$, получим: $\mathfrak{I} = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + \mathfrak{C}$.

► **Задача 2.**

Найти интеграл $\mathfrak{I} = \int \cos(3x+2)\,dx$.

## Решение:

Используем такое правило нахождения первообразной: первообразная функции $f(kx+b)$ равна $\dfrac{1}{k}F(kx+b)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Таким образом, $\mathfrak{I} = \dfrac{1}{3}\big(-\sin(3x+2)\big) + \mathfrak{C} = -\dfrac{1}{3}\sin(3x+2) + \mathfrak{C}$.

Ответ: $\mathfrak{I} = -\dfrac{1}{3}\sin(3x+2) + \mathfrak{C}$.

► **Задача 3.**

Найти интеграл $\mathfrak{I} = \int \left(7x^4 - \frac{2}{x}\right) dx$.

## Решение:

Воспользовавшись свойством интеграла суммы, получим:
$\mathfrak{I} = \int 7x^4\,dx - \int \dfrac{2}{x}\,dx$. Цифры 7 в первом слагаемом и 2 во втором можно вынести за знак интеграла по одному из правил нахождения первообразной (первообразная произведения $kf(x)$ равна $kF(x)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ ). Тогда получим:

$$\mathfrak{I} = 7\int x^4\,dx - 2\int \frac{dx}{x} = 7\frac{1}{4+1}x^{4+1} - 2\ln x + \mathfrak{C}.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = \dfrac{7}{5}x^5 - 2\ln x + \mathfrak{C}$.

## 3.2 Интегрирование путем подведения под знак дифференциала

► **Задача 4.**

Найти интеграл $\mathfrak{I} = \int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

## Решение:

Пусть $x^2 = u$, тогда $du = 2x\,dx$. Следовательно, можно записать:

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u}} = \frac{1}{2}\int (1+u)^{-1/2}\,d(1+u) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2}(1+u)^{1-1/2} + \mathfrak{C}.$$

Заменяя $u$ на $x$, получим ответ: $\mathfrak{I} = -\sqrt{1+x^2} + \mathfrak{C}$

► **Задача 5.**

Найти интеграл $\mathfrak{I} = \int \operatorname{tg} x\,dx$.

## Решение:

Для нахождения этого интеграла вспомним, что: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Следовательно, можно внести $\cos x$ под знак дифференциала. Пусть $u = \cos x$, тогда $du = -\sin x\,dx$, откуда

$$\mathfrak{I} = -\int \frac{(-\sin x)\,dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + \mathfrak{C} = -\ln\cos x + \mathfrak{C}.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = -\ln\cos x + \mathfrak{C}$.

► **Задача 6.**

Найти интеграл $\mathfrak{I} = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx$.

**Решение:**

Легко увидеть, что в данном случае $d(x^3+1) = 3x^2$ и для нахождения этого интеграла удобно заменить $u = x^3+1$, $du = 3x^2\,dx$. Отсюда $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$. Следовательно,

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}u^{1-\frac{1}{3}}+\mathfrak{C} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+\mathfrak{C} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+\mathfrak{C}.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + \mathfrak{C}$.

## 3.3 Замена переменной в неопределенном интеграле

*Применяя указанные подстановки, найти интегралы:*

► **Задача 7.**

$\mathfrak{I} = \int x\sqrt{x-1}\,dx$.

**Решение:**

Осуществим замену $t = \sqrt{x-1}$, тогда $x^2 = t^2+1$ и $dx = 2t\,dt$, следовательно,

$$\mathfrak{I} = \int (t^2+1)t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+t^2)\,dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + \mathfrak{C} = \\ = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \mathfrak{C}.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \mathfrak{C}$.

► **Задача 8.**

$\mathfrak{I} = \int \frac{dx}{\mathrm{e}^x + 1}, \qquad x = \frac{1}{t}.$

**Решение:**

Найдем значение $dx$ для предложенной подстановки: $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Выполним эти подстановки:

$$\mathfrak{I} = -\int \frac{t\,dt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t}^2 - 2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}$$

► **Задача 9.**

$\mathfrak{I} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}, \qquad t = \sqrt{x+1}.$

**Решение:**

Найдем дифференциал подстановки:

$$dt = d\Big((x{+}1)^{\frac{1}{2}}\Big) = \left(\frac{1}{2}{-}1\right)\Big(x{+}1\Big)^{\frac{1}{2}-1} dx = -\frac{1}{2}(x{+}1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}.$$

Теперь остается выразить $x$ через $t$: $t^2 = x + 1$, следовательно, $x = 1 - t^2$. Тогда, подставляя найденные значения, получим:

$$\mathfrak{I} = -2\int x \cdot \frac{-\,dx}{2\sqrt{x+1}} = -2\int \big(1-t^2\big)\,dt = -2\Big(\int dt - \int t^2\,dt\Big) =$$
$$= -2\Big(t - \frac{1}{3}t^3\Big) + \mathfrak{C} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1} + \mathfrak{C}.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1} + \mathfrak{C}$.

## 3.4 Интегрирование по частям

*Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:*

► **Задача 10.**

$\mathfrak{I} = \ln x \, dx.$

**Решение:**

Вспомним *формулу интегрирования по частям*: если $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дифференцируемые функции, то

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Таким образом, необходимо правильно выбрать функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а затем воспользоваться указанной формулой.

В данном случае удобно положить $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$. Подставляя найденные значения в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\mathfrak{I} = uv - \int v \, du = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + \mathfrak{C} = (\ln x$$

Ответ: $I = x(\ln x - 1) + \mathfrak{C}$.

► **Задача 11.**

$\mathfrak{I} = \int \ln^2 x \, dx$

**Решение:**

Здесь логично выбрать замену: $u = \ln x$, $dv = \ln x \, dx$. Тогда, воспользовавшись решением предыдущей задачи, получим:

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int \ln x \, dx = x \ln x - x.$$

$$\mathfrak{I} = \ln x \cdot x(\ln x - 1) - \int \frac{x \ln x - x}{x} \, dx = \ln x \cdot x(\ln x - 1) - \int \ln x \, dx +$$

$$= \ln x \cdot x(\ln x - 1) - x(\ln x - 1) + x + \mathfrak{C} = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + \mathfrak{C}$$

Ответ: $\mathfrak{I} = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + \mathfrak{C}$.

### ▶ Задача 12.

$\mathfrak{I} = \int x\sin x\cos x\,dx$

**Решение:**

Заменим $u = x$, $dv = \sin x\cos x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int \sin x\cos x\,dx$. Найдем $v$, внеся $\cos x$ под знак дифференциала (т.к. $d(\sin x) = \cos x\,dx$):
$v = \int \sin x\,d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2}$. Теперь можно найти $\mathfrak{I}$:

$$\mathfrak{I} = \frac{x\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\big(x - x\cos 2x\big) - \frac{1}{4}\int\big(1-\cos 2x\big)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\big(x - x\cos 2x\big) - \frac{1}{4}\Big(x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big) = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \mathfrak{C}.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \mathfrak{C}$.

## 3.5 Определенный интеграл

*Вычислить интегралы:*

### ▶ Задача 13.

$\mathfrak{I} = \int\limits_1^2 \big(x^2 - 2x + 3\big)\,dx.$

**Решение:**

Определенные интегралы вычисляются по формуле *Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad \Rightarrow$$

$$\mathfrak{I} = \int_1^2 x^2\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + 3\int_1^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - x^2\Big|_1^2 + 3x\Big|_1^2 =$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 4 + 1 + 6 - 3 = \frac{7}{3}.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = \dfrac{7}{3}$.

### ► Задача 14.

$\mathfrak{I} = \int\limits_1^e \dfrac{\sin(\ln x)}{x}\,dx.$

**Решение:**

Вспомним, что $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$. Отсюда получим:

$$\mathfrak{I} = \int_1^e \sin(\ln x)\ d(\ln x) = \cos\big(\ln x\big)\Big|_1^e = -\Big(\cos\big(\ln e\big) - \cos\big(\ln 1\big)\Big) =$$
$$= -(\cos 1 - \cos 0) = 1 - \cos 1.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = 1 - \cos 1$.

*Вычислить интегралы, используя указанные подстановки:*

### ► Задача 15.

$\mathfrak{I} = \int\limits_0^4 \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}, \qquad x = t^2.$

**Решение:**

Найдем дифференциал $x$: $dx = 2t\,dt$. $t = \sqrt{x}$. Так как мы вычисляем определенный интеграл, при замене переменной необходимо пересчитать новые пределы интегрирования. Нижний предел: $x_0 = 0 \ \Rightarrow t_0 = \sqrt{0} = 0$, верхний предел: $x_1 = 4 \ \Rightarrow t_1 = \sqrt{4} = 2$. Теперь переходим к вычислению интеграла:

$$\mathfrak{I} = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{(1+t)\,dt}{1+t} - 2\int_0^2 \frac{dt}{1+t}.$$

Здесь для преобразования дроби мы прибавили к числителю 1 и вычли 1. Во втором полученном интеграле необходимо также сделать замену переменной: $1+t=u$, $du=d(1+t)=dt$. Пересчитаем пределы: $t_0=0 \Rightarrow u_0=1+0=1$, $t_1=2 \Rightarrow u_1=2+1=3$. Теперь можем записать:

$$\mathfrak{I}=2\int_0^2 dt-2\int_1^3 \frac{du}{u}=2t\Big|_0^2-2\ln u\Big|_1^3=4-2\ln 3+2\ln 1=4-2\ln 3.$$

Ответ: $\mathfrak{I}=4-2\ln 3$.

### ▶ Задача 16.

$$\mathfrak{I}=\int\limits_1^3 \sqrt{x+1}\,dx, \qquad x=2t-1.$$

**Решение:**

$dx=2dt$, $x+1=2t-1+1=2t$, $t=(x+1)/2$; $x_0=1 \Rightarrow t_0=(1+1)/2=1$, $x_1=3 \Rightarrow t_1=(3+1)/2=2$.

$$\mathfrak{I}=\int_1^2 \sqrt{2t}\,dt=\sqrt{2}\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}\,dt=\sqrt{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^2=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)=\frac{8-2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\mathfrak{I}=\dfrac{8-2\sqrt{2}}{3}$.

### ▶ Задача 17.

Найти интеграл $\mathfrak{I}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

**Решение:**

Данный интеграл вычисляется по частям. Заменим $u=x$ и

$dv = \cos x\, dx$, тогда $du = dx$ и $v = \sin x$.

$$\mathfrak{I} = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v\, du = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ответ: $\mathfrak{I} = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

# 4 Дифференциальные уравнения

## 4.1 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

► **Задача 1.**

Решить уравнение $xy' = 3 - 2y$.

**Решение:**

Запишем $y'$ в виде $\dfrac{dy}{dx}$ и сгруппируем одинаковые переменные:

$$x\frac{dy}{dx} = 3 - 2y; \quad \frac{dy}{3-2y} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{3-2y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Находя данные интегралы получим общее решение уравнения.

$$\int \frac{dy}{3-2y} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(3-2y)}{3-2y} = -\frac{1}{3}\ln(3-2y) = \ln\frac{1}{\sqrt[3]{3-2y}},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x.$$

В решениях обоих интегралов мы опустили постоянное слагаемое, т.к. оно будет единственным для диф. уравнения. Для удобства решения уравнения положим постоянное слагаемое равным $\ln\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — некоторая константа.

$$\ln x + \ln\mathfrak{C} = \ln\frac{1}{\sqrt[3]{3-2y}}, \quad \mathfrak{C}x = \frac{1}{\sqrt[3]{3-2y}}$$

$$3 - 2y = \frac{1}{(\mathfrak{C}x)^3}, \quad y = \frac{3}{2} - \frac{\mathfrak{C}}{x^3}.$$

Здесь мы преобразовали константу $\mathfrak{C}$ (это можно делать, т.к. произведение константы на постоянный множитель, равно как и проведение над константой многих математических операций, дают другую константу).

Ответ: $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\mathfrak{C}}{x^3}$.

▶ **Задача 2.**

Решить дифференциальное уравнение $y' = (x+y)^2$.

**Решение:**

Осуществим замену $x+y = t$, тогда $dt = dx+dy \Rightarrow dy = dt-dx$ и $y' = \dfrac{dt}{dx} - 1$.

$$\frac{dt}{dx} - 1 = t^2, \quad dt = (t^2+1)\,dx, \quad \frac{dt}{t^2+1} = dx.$$

Интегрируя, получим: $\operatorname{arctg} t = x + \mathfrak{C}$ или, преобразовав обратно:

$$\operatorname{arctg}(x+y) = x + \mathfrak{C}.$$

## 4.2 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

▶ **Задача 3.**

Найти общее решение уравнения $y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

**Решение:**

Полагаем $y = ux$, тогда $y' = u'x + u \Rightarrow u + xu' = \mathrm{e}^u + u$ или $x\,du = \mathrm{e}^u\,dx \Rightarrow \mathrm{e}^{-u}\,du = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, получим: $-\mathrm{e}^{-u} + \ln \mathfrak{C} =$

$\ln x$, $e^{-u} = \ln|\mathfrak{C}| - \ln|x|$, $-u = \ln\big(\ln|\mathfrak{C}| - \ln|x|\big) = \ln\ln\left|\dfrac{\mathfrak{C}}{x}\right|$, откуда $\dfrac{y}{x} = -\ln\ln\left|\dfrac{\mathfrak{C}}{x}\right|$.

Ответ: $y = -x\ln\ln\left|\dfrac{\mathfrak{C}}{x}\right|$.

**► Задача 4.**

Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(x-y)y\,dx - x^2dy = 0$.

**Решение:**

Осуществим замену $y = ux$, $dy = x\,du + u\,dx$. Тогда получим $x(1-u)\cdot ux\,dx = x^2(x\,du + u\,dx)$, $(u-u^2)dx = x\,du + u\,dx$, $x\,du = -u^2\,dx \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{du}{u^2}$. Интегрируя, получим: $\ln x = \dfrac{1}{u} + \ln\mathfrak{C}$, $\ln x = \dfrac{x}{y} + \ln\mathfrak{C} \Rightarrow x = \mathfrak{C}\,e^{\frac{x}{y}}$.

Ответ: $x = \mathfrak{C}\,e^{\frac{x}{y}}$.

## 4.3 Дифференциальные уравнения высших порядков

**► Задача 5.**

Решить уравнение $y'' + y' = 0$.

**Решение:**

Заменим $y = e^{kx}$, где $k$ — некоторая комплексная постоянная. Тогда $y' = k\,e^{kx}$ и $y'' = k^2\,e^{kx}$. Подставляя в уравнение, получим:

$$k^2\,e^{kx} + k\,e^{kx} = 0.$$

Деля полученное уравнение на $e^{kx}$, получим характеристическое уравнение для данного линейного уравнения: $k^2+k = 0$, $k(k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Следовательно, решением этого уравнения будет функция $y = \mathfrak{C}_1\,e^{-x} + \mathfrak{C}_2$.

### ▶ Задача 6.

Найти общее решение уравнения $y'' + y = \sin x$.

**Решение:**

Характеристическое уравнение $k^2 + 1$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$$y_O = \mathfrak{C}_1 \cos x + \mathfrak{C}_2 \sin x.$$

Правой части уравнения $\sin x$ соответствует частное решение

$$y_ч = x(A\cos x + B\sin x).$$

Найдем производные частного решения:

$$y'_ч = A\cos x + B\sin x + x(B\cos x - A\sin x) =$$
$$= (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x,$$

$$y''_ч = B\cos x - (A + Bx)\sin x - A\sin x + (B - Ax)\cos x =$$
$$= (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x.$$

Подставляя $y'_ч$ и $y''_ч$ в уравнение и приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства при $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$ и $x\sin x$, найдем частное решение:

$$(2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x + x(A\cos x + B\sin x) = \sin x,$$

$$2B = 0,\ -A + A = 0,\ -2A = 1,\ -B + B = 0;\ \Rightarrow\ B = 0, A = -\frac{1}{2};\ \Rightarrow$$

$$y_ч = -\frac{x}{2}\cos x.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения:

$$y = \mathfrak{C}_1 \cos x + \mathfrak{C}_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x.$$

### ▶ Задача 7.

Найти общее решение уравнения $y^{IV} - 2y'' = 0$.

**Решение:**

Для данного уравнения характеристическое уравнение имеет вид $k^4 - 2k^2 = 0$, $k^2(k^2 - 2) = 0$. Его решения: $k_{1,2} = 0$, $k_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. Так как $k_1 = k_2$, то этим корням соответствуют два линейно независимых решения $y_1 = \mathfrak{C}_1$ и $y_2 = \mathfrak{C}_2 x$. Корням $k_3$ и $k_4$ соответствуют решения $y_3 = \mathfrak{C}_3\,\mathrm{e}^{x\sqrt{2}}$ и $y_4 = \mathfrak{C}_4 e^{-x\sqrt{2}}$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 x + \mathfrak{C}_3\,\mathrm{e}^{x\sqrt{2}} + \mathfrak{C}_4 e^{-x\sqrt{2}}.$$

### ▶ Задача 8.

Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти уравнение движения, которое будет совершать один из этих грузов, если другой оборвется.

**Решение:**

Пусть увеличение длины пружины под действием одного груза в состоянии покоя равно $x_0$ и масса груза $m$. Обозначим через $x$ координату груза, отсчитываемую по вертикали от положения равновесия при наличии одного груза. На груз действуют сила тяжести $F_{\text{тяж}} = mg$ и сила упругости $F_{\text{упр}} = -k(x + x_0)$. Согласно второму закону Ньютона, ускорение $a$, которое приобретет под действием этих сил можно найти из уравнения

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + x_0).$$

Очевидно, что в состоянии покоя $k(x + x_0) = mg \ \Rightarrow k = \dfrac{mg}{x_0}$.

Следовательно, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{g}{x_0}x$. Общее решение этого уравнения:

$$x = \mathfrak{C}_1 \cos\sqrt{\frac{g}{x_0}}t + \mathfrak{C}_2 \sin\sqrt{\frac{g}{x_0}}t.$$

Начальные условия таковы: $x = x_0$ и $\dfrac{dx}{dt} = 0$ (груз не двигался). Найдем уравнение скорости движения груза со временем:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\mathfrak{C}_1\sqrt{\frac{g}{x_0}}\sin\sqrt{\frac{g}{x_0}}t + \mathfrak{C}_2\sqrt{\frac{g}{x_0}}\cos\sqrt{\frac{g}{x_0}}t,$$

следовательно, $\mathfrak{C}_1 = x_0$ и $\mathfrak{C}_2 = 0$. Окончательно получим:

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{g}{x_0}}t.$$

# Список литературы.

1. Алгебра и начала анализа. Уч. пособие для 9-10 классов средней школы.// под ред. А.Н. Колмогорова. – М., 1999.
2. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу./ М. – 1995г.
3. Я.Я. Выгодский. Справочник по элементарной математике./ М. – 1966г.
4. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х тт./ М. – 1964г.
5. Л.Д. Кудрявцев. Математический анализ. В 2-х тт./ М. – 1966г.
6. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям./ М. – 1973г.
7. М.А. Наймарк. Теория представлений групп./ М. – 1975г.
8. В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений./ М. – 1960г.
9. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. // под ред. Б.П. Демидовича. М. – 1978 г.
10. Б.В. Соболь, Н.Т. Мишняков, В.М Поршкеян. Практикум по высшей математике./ Ростов н/Д: „Феникс”, 2004г.